MB141 – 3. přednáška
Inverzní matice a determinanty

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2020

Osnova přednášky

- Inverzní matice a jejich výpočet
- Determinant matice – motivace
- Základní pravidla pro výpočet
- Cauchyova věta
- Výpočet determinantu pomocí Laplaceova rozvoje
- Použití k výpočtu řešení soustavy – Cramerovo pravidlo

Inverzní matice

Připomeňme, že písmenem E označujeme jednotkovou matici.

Definice

Říkáme, že B je matice inverzní ke čtvercové matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Taková matice je určena jednoznačně, a proto píšeme $B = A^{-1}$, přičemž B je čtvercová matice stejného rozměru jako A. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme invertibilní matice.

Pokud řešíme soustavu $A \cdot x = b$ s invertibilní maticí A, pak $x = A^{-1} \cdot b$ je jediné řešení soustavy.
Postup výpočtu inverzní matice: snažme se určit matici X splňující $A \cdot X = E$ postupně po sloupcích. Je-li A matice 3×3 a sloupce matice X jsou postupně x, y a z, řešíme rovnice

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ay = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Az = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výpočet inverzní matice

Tyto tři soustavy mají stejnou pravou stranu a my je můžeme řešit současně tak, že elementárními řádkovými operacemi upravujeme na schodovitý tvar matici

$$\left(A \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right. \right) = (A|E) \sim \quad \dots \quad \sim (C|D),$$

kde matice C je ve schodovitém tvaru. Mohou nastat tyto dvě možnosti:

1. Její poslední řádek je nulový, pak jedna ze tří rovnic není řešitelná a inverzní matice neexistuje.
2. Matice C má v každém řádku pivota. Ty leží na uhlopříčce. Tedy s maticí $(C|D)$ můžeme provádět tzv. zpětnou Gaussovu eliminaci, tj. elementárními řádkovými operacemi postupně vytvářet nuly nad pivoty matice C.

Výpočet - pokračování

Tímto postupem dostaneme na místě matice C jednotkovou matici, na místě matice D budou sloupce inverzní matice, tedy A^{-1}.

$$(A|E) \sim \cdots \sim (C|D) \sim \cdots \sim (E|A^{-1})$$

Ukažme si to na příkladu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \quad \ldots \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{13}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right).$$

Inverzní matice – algoritmus

Algoritmus pro nalezení inverzní matice

1. Vedle sebe napíšeme původní matici A a jednotkovou matici E.
2. Matici A upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar.
3. Následně zpětnou eliminací na jednotkovou matici E.
4. Tytéž úpravy souběžně prováděné s vedle napsanou maticí E vedou k hledané inverzní matici A^{-1}.
5. Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že matice inverzní neexistuje.

Determinant čtvercové matice

Čtvercové matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

jsme přiřadili číslo $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, které jsme nazvali determinantem matice A. Jeho geometrický význam byl orientovaný obsah rovnoběžníku určeného vektory (a_{11}, a_{21}) a (a_{12}, a_{22}).

Determinant budeme definovat pro každou čtvercovou matici. Neuděláme to ale přímým předpisem (i když to je možné), ale nepřímo tak, že vyčíslíme jeho vlastnosti. Výhodou tohoto postupu je, že nám dává přímý návod k výpočtu determinantu, zatímco z přímé definice determinant většinou nepočítáme

Geometrický význam determinantu matice A tvaru $n \times n$ bude orientovaný objem rovnoběžnostěnu v n-rozměrném prostoru určeného vektory sloupců (nebo řádků) matice A.

Determinant – základní pravidla

Definice

Každé čtvercové matici A tvaru $n \times n$ lze jednoznačně přiřadit číslo $|A|$, determinant matice A, který splňuje následující pravidla:

1) Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků matice A, pak $|B| = -|A|$.
2) Vznikne-li matice B vynásobením některého řádku matice A číslem c, pak $|B| = c \cdot |A|$.
3) Vznikne-li matice B z matice A přičtením násobku některého řádku k jinému řádku, pak $|B| = |A|$.
4) Determinant jednotkové matice je $|E| = 1$.
5) Determinant transponované matice je $|A^T| = |A|$.

Odvozená pravidla

Z předchozích pravidel lze odvodit další:

6) Pravidla 1), 2) a 3) platí rovněž pro sloupcové úpravy.
7) Determinant čtvercové matice ve schodovitém tvaru (tzv. horní trojúhelníkové matice) je roven součinu čísel na uhlopříčce matice. ▶▶
8) Determinant matice, která obsahuje nulový řádek nebo sloupec, je roven 0. ▶▶
9) Je-li A matice tvaru $k \times k$, B matice tvaru $(n-k) \times (n-k)$, C matice tvaru $k \times (n-k)$ a O nulová matice tvaru $(n-k) \times k$, pak determinant matice $n \times n$ je ▶▶

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

Výpočet determinantu provádíme pomocí Gaussovy eliminace.

Determinant – příklad výpočtu

Příklad

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledek: $|A| = 9$.

Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Výsledek: $|B| = 12$.

Cauchyova věta

Věta (Cauchyova)

Pro libovolné dvě čtvercové matice A a B stejné velikosti platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Důsledek: Determinant invertibilní matice je nenulový a platí $|A^{-1}| = |A|^{-1}$. Platí i obrácené tvrzení.

Věta

Pro čtvercovou matici A je ekvivalentní:

- $|A| \neq 0$,
- *existuje* A^{-1},
- *Pro každou pravou stranu* b *má soustava* $A \cdot x = b$ *jediné řešení.*

Laplaceův rozvoj determinantu

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pro zvolené indexy i, j označme A_{ij} čtvercovou matici velikosti $n - 1$, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak číslo

$$\widehat{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

nazýváme algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A.

Věta (Laplaceův rozvoj)

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak pro libovolný index i platí

$$|A| = a_{i1}\widehat{A_{i1}} + a_{i2}\widehat{A_{i2}} + \cdots + a_{in}\widehat{A_{in}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widehat{A_{ij}}\,.$$

Hovoříme o rozvoji podle i-tého řádku.

Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$|B| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (8 - 14) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) = 12\,.$$

Všimĕme si, že

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Determinant matice 3×3

Proveďme Laplaceův rozvoj obecné matice 3×3 podle 1. řádku

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Pozor, pro větší rozměr nelze počítat takto „úhlopříčně“. Ani případy $n = 2$ a $n = 3$ nejsou aplikací stejného „úhlopříčného principu“.

Cramerovo pravidlo

Řešíme rovnici $Ax = b$, kde A je čtvercová matice, $|A| \neq 0$.

- $|A| \neq 0$ implikuje jednoznačnost řešení.
- $|A| \neq 0$ implikuje existenci A^{-1}.
- Odtud $x = A^{-1}b$, kde $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

Věta

Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak soustava $Ax = b$ má jediné řešení $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, kde

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

přičemž A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem b.

Cramerovo pravidlo – příklad

Příklad (Motivační příklad)

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1, \quad x_2, x_3$$ – sami.

Požadavky

- Spočítat inverzní matici (dle algoritmu).
- Spočítat determinant matic (i matic s parametrem). Ovládat obě metody a umět je kombinovat.

Domácí úloha

Příklad (3.1)

Určete inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Příklad (3.2)

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Doplňující domácí úloha

Příklad (3.3)

Pro libovolnou elementární řádkovou operaci nalezněte matici, která ji realizuje pomocí násobení. Tj. pokud $A \sim B$ je jedna úprava, pak existuje matice U taková, že $B = U \cdot A$.

Příklad (3.4)

Nechť a a b jsou dvě různá reálná čísla a n je kladné celé číslo. Určete determinant matice n/n, která má všechny prvky pod hlavní diagonálou rovny b a všechny prvky na a nad hlavní diagonálou rovny a.