MB141 – 6. přednáška
Skalární součin

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2020

Osnova přednášky

- Skalární součin
- Ortonormální báze
- Ortogonální doplněk a kolmá projekce
- Ortogonální transformace a matice

Skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$

Skalární součin přiřazuje dvěma vektorům reálné číslo. Na střední škole jste si ho definovali na $\mathbb{R}^2$ předpisem

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

a na $\mathbb{R}^3$ podobným předpisem

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Takto definované zobrazení má tyto vlastnosti

1) $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} \rangle$,
2) $\langle \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle + \langle \overrightarrow{z}, \overrightarrow{y} \rangle$,
3) $\langle a\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = a\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle$,
4) $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle > 0$ pro všechny vektory $\overrightarrow{x} \neq 0$.

Ukazuje se jako výhodné definovat skalární součin na libovolném reálném vektorovém prostoru jenom pomocí těchto čtyř vlastností.

Skalární součin – definice a příklady

(Šipky nad vektory už nebudeme psát.)

Definice

Skalární součin na vektorovém prostoru V nad reálnými čísly je zobrazení $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ takové, že

1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$,
2) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,
3) $\langle a \cdot u, v\rangle = a \cdot \langle u, v\rangle$,
4) $\langle v, v\rangle \geq 0$ a je roven 0 pouze při $v = 0$.

Příklady:

- My budeme obvykle pracovat s tzv. standardním skalárním součinem na $V = \mathbb{R}^n$

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n\,.$$

Skalární součin - příklady

- Na $\mathbb{R}^n$ existuje mnoho dalších skalárních součinů. Např. na $\mathbb{R}^2$ zadává předpis

  $$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

  také skalární součin. Poslední vlastnost z definice je splněna, neboť

  $$\langle x, x\rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

  pro $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.
- Na prostoru všech polynomů $V = \mathbb{R}[x]$ můžeme skalární součin zadat pomocí určitého integrálu

  $$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(t) \cdot v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Velikost a kolmost vektorů

Velikost vektoru v se definuje jako

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}\,.$$

Vektory $u, v \in V$ se nazývají ortogonální (kolmé), jestliže

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Píšeme $u \perp v$.

Věta (Cauchyova nerovnost)

Pro každé dva vektory u a $v \in V$ platí nerovnost

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Rovnost nastane, právě když jeden vektor je násobkem druhého.

Odchylky vektorů

Jestliže jsou vektory u a v nenulové, platí podle Cauchyovy nerovnosti

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Proto existuje právě jedno číslo $\alpha \in [0, \pi]$ takové, že

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Toto číslo nazýváme odchylkou vektorů u a v.

Ortogonální a ortonormální báze

Báze prostoru V složená z navzájem kolmých vektorů se nazývá ortogonální báze.
Mají-li bázové vektory navíc jednotkovou velikost , mluvíme o ortonormální báze. Název pochází z toho, že vektory jednotkové velikosti se nazývají normované.
Standardní úlohou je najít najít v podprostoru generovaném několika vektory nejdříve ortogonální a potom ortonormální bázi.

Příklad

Nalezněte ortogonální a ortonormální bázi podprostoru $M = [(1,1,1,1),(1,0,0,3),(1,2,1,0)]$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.

Označne tyto vektory postupně v_1, v_2 a v_3. Chceme je postupně nahradit navzájem kolmými vektory u_1, u_2, u_3.

- Začněme tím, že položíme $u_1 = v_1 = (1,1,1,1)$.

Pokračování příkladu

- Vektor u_2 hledáme ve tvaru $u_2 = v_2 - au_1$. Rovnost vynásobíme skalárně vektorem u_1
$$0 = \langle u_2, u_1\rangle = \langle v_2, u_1\rangle - a\langle u_1, u_1\rangle.$$
Odtud spočítáme $a = \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = \frac{4}{4} = 1$. Tedy
$u_2 = v_2 - 1 \cdot u_1 = (1, 0, 0, 3) - (1, 1, 1, 1) = (0, -1, -1, 2)$.
- Vektor u_3 hledáme ve tvaru $u_3 = v_3 - bu_2 - cu_1$. Rovnost vynásobíme skalárně vektoremu_1
$$0 = \langle u_3, u_1\rangle = \langle v_3, u_1\rangle - b\langle u_2, u_1\rangle - c\langle u_1, u_1\rangle.$$
Protože $\langle u_2, u_1\rangle = 0$, spočítáme $c = \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = 1$.
Obdobně rovnost vynásobíme skalárně vektorem u_2
$$0 = \langle u_3, u_2\rangle = \langle v_3, u_2\rangle - b\langle u_2, u_2\rangle - c\langle u_1, u_2\rangle.$$
Protože $\langle u_1, u_2\rangle = 0$, spočítáme $b = \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} = -\frac{1}{2}$, tedy
$u_3 = (0, 1/2, -1/2, 0)$.

Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces

Velikosti vektorů jsou $\|u_1\| = 2$, $u_2 = \sqrt{6}$, $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ortonormální báze podprostoru M je tedy

$$\frac{1}{2}(1,1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(0,-1,-1,2),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1,0).$$

Výše uvedený postup lze aplikovat na libovolnou k-tici lineárně nezávislých vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$, abychom dostali k-tici navzájem ortogonálních vektorů. Nazývá se Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces.

Ortogonální doplněk a kolmá projekce

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Množina všech kolmých vektorů k vektorům z U

$$U^\perp = \{v \in V|\ \langle v, u\rangle = 0 \text{ pro všechna } u \in U\}$$

se nazývá ortogonální doplněk podprostoru U ve V. Jde opět o vektorový podprostor. Platí, že $U + U^\perp = V$ a $U \cap U^\perp = \{0\}$. To je ekvivalentní s tím, že pro každý vektor $v \in V$ existuje právě jeden vektor $u \in U$ a právě jeden vektor $w \in U^\perp$ tak, že

$$v = u + w.$$

Vektor u nazýváme kolmou projekcí vektoru v do U. Kolmá projekce do popdprostoru U je lineární zobrazení $P_U : V \to V$, které zobrazuje vektory $u \in U$ na sebe a vektory $w \in U^\perp$ na nulový vektor. V terminologii z předchozí přednášky má kolmá projekce vlastní číslo 1 s vlastním podprostorem U a vlastní číslo 0 s vlastním podprostorem $U^\perp$. Výpočet kolmé projekci ukážeme na příkladu.

Výpočet kolmé projekce

Příklad

V prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte kolmou projekci vektoru $v = (0, 2, 6, 0, 5)$ do podprostoru $U = [u_1 = (1, 0, 1, 0, 2), u_2 = (-1, 2, 3, 2, 1)]$ a jeho ortogonálního doplňku $U^\perp$.

Kolmou projekci vektoru v do U hledáme ve tvaru

$$P_U v = au_1 + bu_2.$$

Protože $v = P_U v + P_{U^\perp} v$, musí být $v - P_U v \in U^\perp$. Tedy $v - P_U v$ je kolmé na vektory $u_1, u_2 \in U$. Dostáváme tedy rovnice

$$\begin{aligned}\langle v - P_U v, u_1\rangle &= \langle v - au_1 - bu_2, u_1\rangle = 0,\\ \langle v - P_U v, u_2\rangle &= \langle v - au_1 - bu_2, u_2\rangle = 0.\end{aligned}$$

Po úpravě

Pokračování příkladu

$$a\langle u_1, u_1\rangle + b\langle u_2, u_1\rangle = \langle v, u_1\rangle,$$
$$a\langle u_1, u_2\rangle + b\langle u_2, u_2\rangle = \langle v, u_2\rangle.$$

Vypočteme příslušné skalární součiny

$$6a + 4b = 16,$$
$$4a + 19b = 27.$$

Řešení je $a = 2$ a $b = 1$. Kolmá projekce je tedy

$$P_U v = 2u_1 + u_2 = (1, 2, 5, 2, 5).$$

Dimenze ortogonálního doplňku $U^\perp$ je 3. Kolmou projekci do $U^\perp$ nejrychleji spočítáme jako rozdíl

$$P_{U^\perp} v = v - P_U v = (-1, 0, 1, -2, 0).$$

Ortogonální transformace

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ nazýváme ortogonální transformací, jestliže pro všchny dvojice vektorů $u, v \in V$ platí

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Říkáme, že φ zachovává skalární součin. φ zachovává rovněž velikosti vektorů, neboť
$\|\varphi(v)\| = \sqrt{\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|$.
Nechť $V = \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Skalární součin dvou vektorů x a $y \in \mathbb{R}^n$, které bereme jako sloupce velikosti n můžeme zapsat pomocí maticového násobení takto:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T \cdot y.$$

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice $n \times n$, je ortogonální transformace. Potom podle definice platí

Ortogonální matice

(E je jednotková matice)
$x^T \cdot E \cdot y = x^T \cdot y = \langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^T \cdot Ay = x^T(\cdot A^T \cdot A) \cdot y$
pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$. Proto je $A^T A = E$, tedy inverzní matice k matici A je transponovaná matice. Takovým maticím říkáme ortogonální matice. Jejich definice je ekvivalentní s podmínkami

- $AA^T = E$.
- Řádky matice A tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$.
- Sloupce matice A tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$.

Podstatné vlastnosti ortogonálních matic zachycuje následující

Věta

Determinant ortogonální matice je roven ± 1. Vlastní čísla ortogonální matice mají absolutní hodnotu 1. To platí i komplexní vlastní čísla. Jsou-li vlastní čísla reálná, tak jsou ± 1.

Lineární shodné transformace v rovině

Jsou to ortogonální transformace $\varphi(x) = Ax$, kde A je ortogonální matice 2×2. Mohou nastat tyto možnosti:

1) $\det A = 1$. Potom je φ otočení proti směru hodinových ručiček kolem počátku o úhel α. Ten je určen jednoznačně prvním sloupcem matice, která má tvar

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2) $\det A = -1$. Potom je φ symetrií podle osy procházející počátkem se směrovým vektorem rovným vlastnímu vektoru k vlastnímu číslu 1. Další vlastní číslo je -1 a jeho vlastní vektor $v = (a, b)$ je kolmý ke směrovému vektoru osy. Tedy osa symetrie má rovnici

$$ax_1 + bx_2 = 0.$$

Lineární shodné transformace v prostoru $\mathbb{R}^3$

Jsou to ortogonální transformace $\varphi(x) = Ax$, kde A je ortogonální matice 3×3. Charakteristický polynom matice A je stupně 3, a proto má aspoň jeden reálný kořen. Tedy φ má vlastní číslo 1 nebo -1. Opět rozlišíme dvě možnosti:

1) $\det A = 1$. Potom má φ vlastní číslo 1 a je otočením kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem rovným vlastnímu vektoru v k vlastnímu číslu 1. Úhel otáčení α zjistíme tak, že si vezmeme nějaký vektor $u \neq 0$ kolmý k v a spočítáme, jaký úhel svírá s vektorem $\varphi(u) = Au$:
$$\cos \alpha = \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\| \|Au\|}.$$

2) $\det A = -1$. V tomto případě má φ vlastní vektor -1 a je složením dvou zobrazení. Prvé je otočení kolem osy se směrovým vektorem rovným vlastnímu vektoru v k vlastnímu číslu -1 a druhé je symetrie podle roviny procházející počátkem a kolmé k vektoru v.

Příklad I

Úhel otáčení zjistíme stejným způsobem jako v předchozím případě.

Příklad

Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Ax$, kde $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Pozorně spočítáme, že $\det A = \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -1$.

Tedy A musí mít podle předchozího vlastní číslo -1. Nemusíme tedy počítat charakteristický polynom, ale rovnou spočítáme vlastní vektor k -1 řešením soustavy $(A + E)v = 1$. Zjistíme, že $v = p(1, 1, 2)$, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$. Vezmeme nějaký kolmý vektor, např. $u = (1, -1, 0)$. Spočítáme $\varphi(u) = Au = u$. Tedy úhel otáčení je nulový, proto φ popisuje symetrii podle roviny

Příklad II

procházející počátkem kolmé k vektoru $v = (1, 1, 2)$. Ta má rovnici $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

Příklad

Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Analogicky jako v předchozí úloze

$\det B = \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -1$. Tedy B má vlastní číslo -1. Najdeme vlastní vektor k -1 řešením soustavy $(B + E)v = 1$. Zjistíme, že $v = p(1, 1, 1)$. Vezmeme nějaký kolmý vektor, např. $u = (1, -1, 0)$. Spočítáme $Bu = (-1, 0, 1)$. Pro úhel otáčení je $\cos\alpha = \frac{\langle u, Bu\rangle}{\|u\|\|Bu\|} = -\frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, tj. 120^o.

Dokončení příkladu II

Transformace φ je tedy složením symetrie podle roviny $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ a otočení kolem přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, 1, 1)$ o úhel $\frac{2}{3}\pi$ (ve směru od vektoru $(1, -1, 0)$ k vektoru $(-1, 0, 1)$).

Požadavky

Typické příklady:

- Najít v podprostoru ortogonální, resp. ortonormální bázi.
- Najít ortogonální doplněk podprostoru v $\mathbb{R}^n$.
- Spočítat kolmou projekci do podprostoru v $\mathbb{R}^n$.
- Zjistit, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení zadané ortogonální maticí 2×2 a 3×3.

Domácí úloha

Příklad (6.1)

Grammovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem sestrojte ortogonální bázi podprostoru M v prostoru $\mathbb{R}^4$, je-li

$$M = [(1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(0,1,1,0)].$$

Určete nějakou ortonormální bázi podprostoru M a doplňte ji na ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

Příklad (6.2)

V souřadnicích standardní báze je zobrazení φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe určeno maticí

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Určete, o jaké zobrazení se jedná.