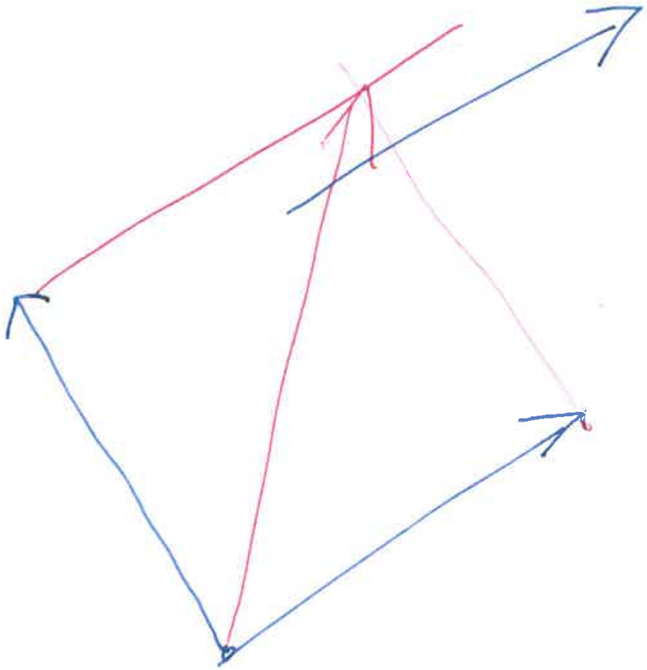
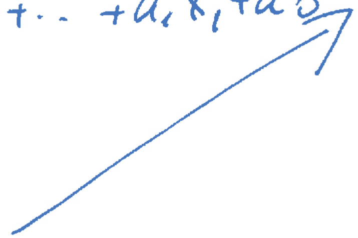
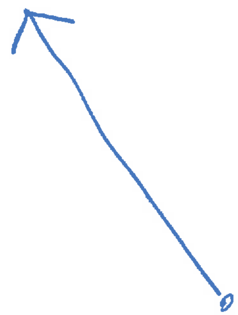
$$\mathbb{R}_n[x] \longleftrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$a_n x^n + \dots + a_1 x_1 + a_0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$





$$\vec{0} = \overrightarrow{AA}$$



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$$

$\mathbb{R}^n$ $\quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_n) \qquad \vec{y} = (y_1, \dots y_n)$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$$

$$a\vec{x} = (ax_1, \dots ax_n)$$

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \ a_i \in \mathbb{R}\}$$

2

$M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$ A matice $k \times n$

vekt. prostor.

$\mathbb{R}[x]$ $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \longmapsto (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$

Všechny posloupnosti reálných čísel $\longrightarrow$ vekt. prostor

$\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(af)(x) = a f(x)$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dvojice celých čísel není vekt. prostor nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$

$M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \neq 0 \}$

x, y dvě řešení $A(x+y) = Ax + Ay = 2b \neq b$

není vekt. prostor

③

Učte $M = \{ A \ \ 2\times 2 \text{ matice}, \ \det A = 1 \}$

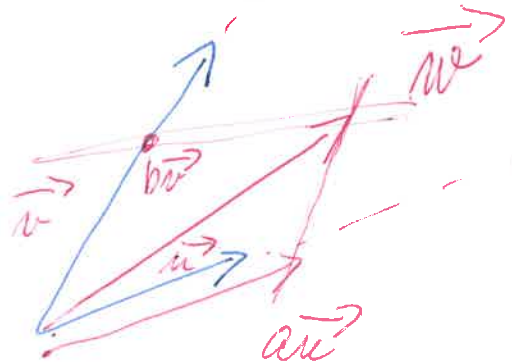
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{9}{2}$$

$$u - v \underset{\text{def}}{=} u + (-v)$$

$$\left(\sum_i a_i \right) \left(\sum_j u_j \right) = \sum_{i,j} a_i u_j$$

$$(a_1 + a_2)(u_1 + u_2 + u_3) = a_1 u_1 + a_1 u_2 + a_1 u_3 + a_2 u_1 + \ldots$$

$\mathbb{R}^2$



$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

$\forall (a_1 \dots a_k) \in \mathbb{K}^k$

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \vec{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

Definice říká:

Jestliže rovnice $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$ v neznámých $a_1, a_2 \dots a_k$ má pouze triviální řešení $a_1 = \dots = a_k = 0$, pak jsou $v_1 \dots v_k$ lin. nezávislé.

PODLE TOHO POČÍTÁME.

~~Nezáv~~ Závislost

$\exists (a_1 \dots a_k) \in \mathbb{K}^k$

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \vec{0} \quad \wedge \quad (a_1 \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0)$$

$\exists (a_1 \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0)$

$$a_1 v_1 + \dots a_k v_k = \vec{0}$$

5

$v_1 \dots v_k$ lin. závislé

$$\exists (a_1 \dots a_k) \neq (0, \dots 0) \quad a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$$

nechť $a_1 \neq 0$

$$a_1 v_1 = -a_2 v_2 - a_3 v_3 - \dots - a_k v_k \quad \Big| \; a_1 \neq 0, \; \frac{1}{a_1}$$

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \frac{a_3}{a_1} v_3 - \dots - \frac{a_k}{a_1} v_k$$

v_1 napíšeme jako lin. kombinaci ostatních.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \vec{0}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 \quad\;\; + 2a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a_3 lze zvolit za parametr, a_2 a a_1 dopočítáme

$\Rightarrow$ soustava má NENULOVÉ ŘEŠENÍ

$$a_1(x^3-x+1)+a_2(2x^3+x^2-2x)+a_3(x^4+x^3-x)\cancel{+a_4(x^4-x^2+1)}=0$$

$$\begin{array}{lrcl}
x^4: & a_3 + \cancel{a_4} & = & 0 \\
x^3: & a_1 + 2a_2 + a_3 & = & 0 \\
x^2: & a_2 - \cancel{a_4} & = & 0 \\
x: & -a_1 - 2a_2 - a_3 & = & 0 \\
1 & a_1 + \cancel{a_4} & = & 0
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \cancel{1} & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cancel{-1} & 0 \\ -1 & -2 & -1 & \cancel{0} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cancel{1} & 0 \end{array}\right) \sim$$

jsou lin. závislé

p_1, p_2, p_4 jsou lin. nezávislé.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

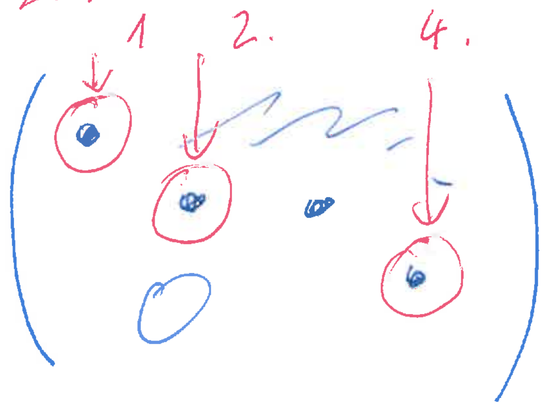
p_1, p_2, p_3, p_4 jsou lin. závislé

p_1, p_2, p_3 jsou lin. nezávislé počítání červeně

Pro p_1, p_2, p_3 má pouze triv. řešení

p_1, p_2, p_3 jsou LN.

(v_1, v_2, v_3, v_4)



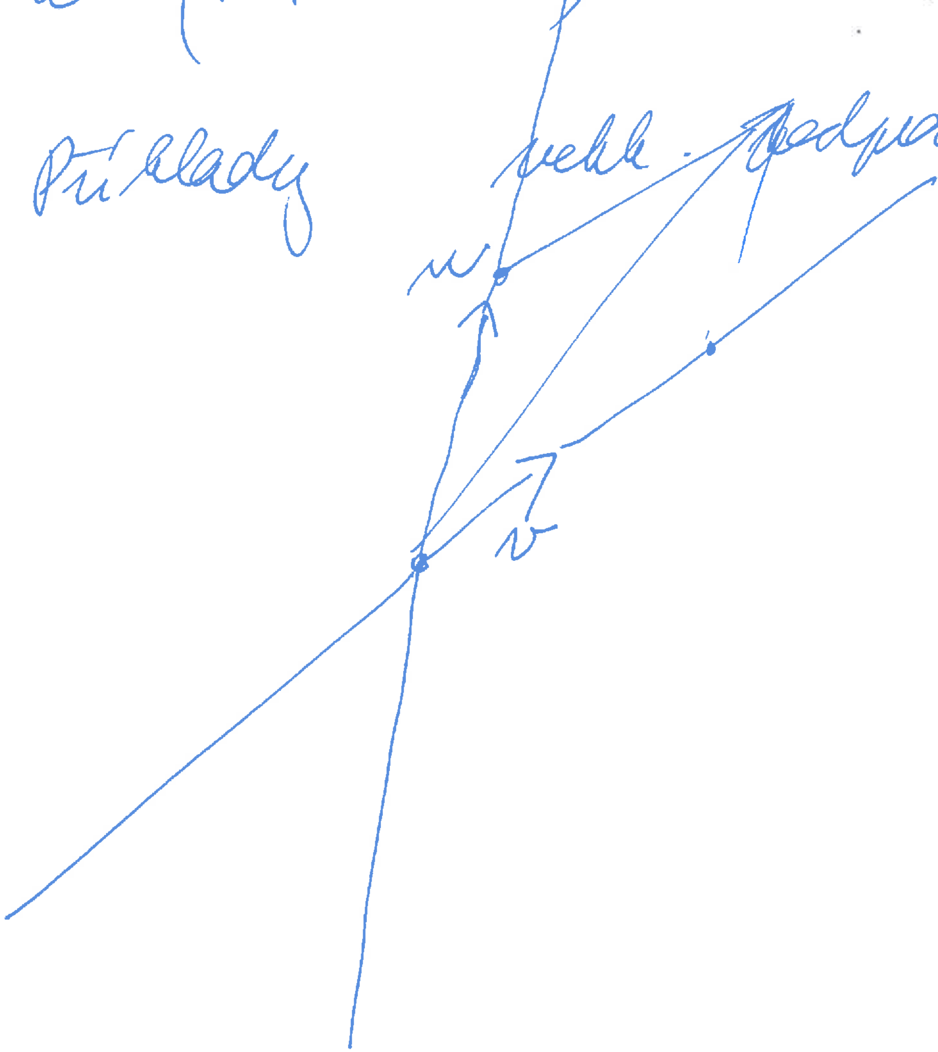
$v_1, v_2, v_4 \Rightarrow$ jsou lin. nezávislé.

$U \subseteq V$ vekt. prostor

U je vekt. podprostor, přesněji $\quad U \neq \emptyset$

a $(\forall a, b \in \mathbb{K})(\forall u, v \in U)(au + bv \in U)$

Příklady vekt. podprostorů v $\mathbb{R}^2$ $\qquad U \subseteq \mathbb{R}^2$



$\{\vec{0}\}$

$v \neq 0 \quad v \in U$

přímka $\{av, \ a \in \mathbb{R}\}$

je vekt. podprostor

$\{av, \ a \in \mathbb{R}\} \subseteq U$

$\{bu, \ b \in \mathbb{R}\} \subseteq U$

$U = \mathbb{R}^2$

Všechny podprostory v $\mathbb{R}^2$: $\{0\}$ - počátek, přímky procház. počátkem a celé $\mathbb{R}^2$.

9

$V = \mathbb{R}^n$ vekt. prostor

$U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$ vekt. podprostor v $\mathbb{R}^n$.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ rovina prochází počátkem v $\mathbb{R}^3$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0$$

Lineární obal vektorů

V $\quad u_1, u_2, \dots u_k \in V$

$[u_1, u_2 \dots u_k] = \{ a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \in V \mid a_1, a_2 \dots a_k \in \mathbb{K} \}$

$\mathbb{R}^2$ $\quad [u] = \{ au \mid a \in \mathbb{R} \}$ $\quad u \neq \vec{0}$ přímka, $\quad u, v$ neleží v přímce

$[u, v] = \{ au + bv \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$

Lin. obal vektorů a vekt. podprostor.

Spec. případ $[\emptyset] = [\ ] = \{\vec{o}\}$

Úloha: Leží vektor u v lin. obalu vektorů v_1, v_2, v_3?

$u \in [v_1, v_2, v_3] \iff \exists\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = u$$

Vede na soustavu rovnic o 3 neznámých

Matice

$$\left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle\| u \right) \sim \dots\dots \quad 0\ 0\ 0\ 0 \,\|\, 0$$

má řešení $\Rightarrow u \in [v_1, v_2, v_3]$

nemá řešení $\Rightarrow u \notin$

$0\ 0\ 0\ 0 \,\|\, \neq 0$ nemá řešení

11

vektory $v_1, \dots v_n$ generují vekt. prostor V

$$\forall u \in V \quad \exists a_1 \dots a_n \in \mathbb{K}$$

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \iff u \in [v_1, \dots v_n]$$

$$\iff V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

$v_1, \dots v_n$ tvoří bázi V

1. $\forall u \in V \quad \exists a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}^n \quad u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

2. $\forall (b_1, b_2 \dots b_n) \in \mathbb{R}^n \quad b_1 v_1 + \dots + b_n v_n = \vec{0} \Rightarrow b_1 = \dots = b_n = 0$

$\iff$

A $\quad \forall u \in V \quad \exists! \, (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n \quad u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

existuje právě jedna

Souřadnice vektoru u v bázi $(v_1, v_2, \dots v_n)$
je n-tice čísel
$(a_1, a_2, \dots a_n)$ ~~tak~~ $\in \mathbb{K}^n$ takové, že

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n .$$

V vekt. prostor konečněrozměrný

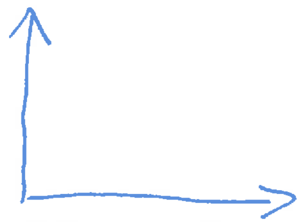
<u>$\dim V$ = počet vektorů báze.</u>

- každý konečněrozměrný prostor má bázi
- každé dvě báze mají stejný počet vektorů

$\dim \{\vec{o}\} = 0$ báze $\{\} = \emptyset$.

$e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1)$

$(x_1,x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$



souřadnice v této bázi jsou (x_1,x_2)

---

jiná báze v $\mathbb{R}^2$

$u_1 = (1,1), \; u_2 = (0,1)$

$(x_1,x_2) = x_1(1,1) + (x_2-x_1)(0,1)$

souřadnice v této bázi jsou (x_1, x_2-x_1)

$M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \; x_1+x_2+x_3 = 0\}$

$u_1 = (1,-1,0)$ $\qquad v_1 = (1,1,-2)$

$u_2 = (0,1,-1)$ $\qquad v_2 = (1,-2,1)$

$M = [(1,1,1),(-1,0,1),(1,2,3)] = [(1,1,1),(-1,0,1)]$

báze je $(1,1,1),(-1,0,1)$, $\dim = 2$.

Doplňte lin. nez. vektory na bázi celého prostoru

$\mathbb{R}^4$ $\quad v_1 = (1,1,0,2) \quad v_2 = (2,1,1,0)$

Doplnit v_1, v_2 na bázi $\mathbb{R}^4$

$(v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4)$ 6 vektorů, z nich vybereme lin. nez.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots\cdots \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1. & 2. & 3. & & 5. & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \bullet & & & & & \\ & \bullet & & & & \\ & & \bullet & 0 & & \\ & & & & \bullet & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

báze $\mathbb{R}^4$

Lin. nez. v_1, v_2, e_1, e_3

Průnik podprostorů $\quad P, Q \subseteq V$ podprostory

$$P \cap Q = \{ v \in V \mid v \in P \wedge v \in Q \}$$ je to vekt. podprostor

$$P \cap Q \ni z$$

$$z = ax^4 + bx^2 + c = pv_1 + qv_2 + rv_3$$

$$0 = p + 2q + r \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ a & b & c & & & \end{array}$$

$$p = -2q - r \qquad (\; | \; | \; | \; -2q - r, q, r)$$ báze $P \cap Q$

$$z \in P \cap Q = \{ (-2q - r) v_1 + q v_2 + r v_3 \} =$$ lin. nez.

$$= \{ q(v_2 - 2v_1) + r(v_3 - v_1) \} = [v_2 - 2v_1, v_3 - v_1]$$

$U, W \subseteq V$

$\underline{U \cup W}$ není obecně vekt. podprostor

$\mathbb{R}^2$

$U+W = \{u+w \in V \mid u \in U, w \in W\}$

$U = [u_1, u_2] \mid W = [w_1, w_2, w_3] \Rightarrow U+W = [u_1, u_2, w_1, w_2, w_3]$

najít bázi $U+W$ znamená vybrat lin. nezávislé z těchto prvků.