FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I

Řešení cvičení 8.

1. **a)** $\mathcal{A} = (\{q\}, \{a, e, +, *, (,)\}, \{R, K, I, D, a, e, +, *, (,)\}, \delta, q, R, \emptyset)$,
   $\delta(q, \varepsilon, R) = \{(q, R + K), (q, K)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, K) = \{(q, KI), (q, I)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, I) = \{(q, I^*), (q, D)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, D) = \{(q, (R)), (q, a), (q, e)\}$
   $\delta(q, x, x) = \{(q, \varepsilon)\}$ pro všechna $x \in \{a, e, +, *, (,)\}$

   b) $\mathcal{A} = (\{q, r\}, \{a, e, +, *, (,)\}, \{R, K, I, D, a, e, +, *, (,), \$\}, \delta, q, \$, \{r\})$,
   $\delta(q, x, \varepsilon) = \{(q, x)\}$ pro všechna $x \in \{a, e, +, *, (,)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, R + K) = \{(q, R)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, K) = \{(q, R)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, K + I) = \{(q, K)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, I) = \{(q, K)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, I^*) = \{(q, I)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, D) = \{(q, I)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, (R)) = \{(q, D)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, a) = \{(q, D)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, e) = \{(q, D)\}$
   $\delta(q, \varepsilon, \$R) = \{(r, \varepsilon)\}$

2. **a)** $\mathcal{A}_1 = (\{p_1, p_2, q_0, q_1, f\}, \{a, b\}, \{a, Z\}, \delta, p_1, Z, \{f\})$
   $\delta(p_1, a, Z) = \{(p_2, Z)\}$
   $\delta(p_2, b, Z) = \{(q_0, Z_0)\}$
   $\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, aZ)\}$
   $\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\}$
   $\delta(q_0, b, a) = \{(f, aa)\}$
   $\delta(f, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
   $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
   $\delta(q_1, b, Z) = \{(q_0, Z)\}$

   b) Každé slovo w patřící do jazyka $\Sigma^* - -(L_1 \cap L_2)$ splňuje alespoň jednu z následujících podmínek:
   s_1: začína symbolem b
   s_2: začína řetězem aa
   s_3: končí symbolem a
   s_4: neobsahuje symbol b
   s_5: obsahuje lichý počet symolů b
   s_6: $w = a^{i_1} b a^{i_2} \dots a^{i_k} b$ a existuje x takové, že $i_x + 1 \neq i_{x+1}$
   $\mathcal{A} = (\{s, s_1, s_2, \overline{s_2}, s_3, s_4, s_5, \overline{s_5}, s_6, f, k, n, u, v\}, \{a, b\}, \{a, Z\}, \delta, s, Z, \{f, k, s_4, \overline{s_5}\})$
   $\delta(s, \varepsilon, Z) = \{(s_1, Z), (s_2, Z), (s_3, Z), (s_4, Z), (s_5, Z), (s_6, Z)\}$
   $\delta(s_1, b, Z) = \{(f, Z)\}$ $\delta(f, a, Z) = \delta(f, b, Z) = \{(f, Z)\}$
   $\delta(s_2, a, Z) = \{(\overline{s_2}, Z)\}$ $\delta(\overline{s_2}, a, Z) = \{(f, Z)\}$
   $\delta(s_3, b, Z) = \{(s_3, Z)\}$ $\delta(s_3, a, Z) = \{(s_3, Z), (k, Z)\}$
   $\delta(s_4, a, Z) = \{(s_4, Z)\}$
   $\delta(s_5, a, Z) = \{(s_5, Z)\}$ $\delta(s_5, b, Z) = \{(\overline{s_5}, Z)\}$
   $\delta(\overline{s_5}, a, Z) = \{(\overline{s_5}, Z)\}$ $\delta(\overline{s_5}, b, Z) = \{(s_5, Z)\}$
   $\delta(s_6, a, Z) = \{(n, Z), (u, aZ)\}$
   $\delta(n, a, Z) = \{(n, Z)\}$ $\delta(n, b, Z) = \{s_6, Z)\}$
   $\delta(u, a, a) = \{(u, aa)\}$ $\delta(u, b, a) = \{v, aa)\}$
   $\delta(v, a, a) = \{(v, \varepsilon)\}$ $\delta(v, b, a) = \{f, Z)\}$
   $\delta(v, a, Z) = \{(f, Z)\}$

3. Hledaná gramatika je tvaru
$G = (\{S, [q_0Z_0q_0], [q_0Z_0q_1], [q_0Xq_0], [q_0Xq_1], [q_1Z_0q_0], [q_1Z_0q_1], [q_1Xq_1]\}, \{0,1\}, P, S)$,
přičemž množina pravidel P obsahuje následující pravidla:

$$
\begin{array}{llllllll}
P: & S & \longrightarrow & [q_0Z_0q_0] & | & [q_0Z_0q_1] & & \\
 & [q_0Z_0q_0] & \longrightarrow & 1[q_0Xq_0][q_0Z_0q_0] & | & 1[q_0Xq_1][q_1Z_0q_0] & | & \epsilon \\
 & [q_0Z_0q_1] & \longrightarrow & 1[q_0Xq_0][q_0Z_0q_1] & | & 1[q_0Xq_1][q_1Z_0q_1] & & \\
 & [q_0Xq_0] & \longrightarrow & 1[q_0Xq_0][q_0Xq_0] & | & 1[q_0Xq_1][q_1Xq_0] & | & 0[q_1Xq_0] \\
 & [q_0Xq_1] & \longrightarrow & 1[q_0Xq_0][q_0Xq_1] & | & 1[q_0Xq_1][q_1Xq_1] & | & 0[q_1Xq_1] \\
 & [q_1Z_0q_0] & \longrightarrow & 0[q_0Z_0q_0] & & & & \\
 & [q_1Z_0q_1] & \longrightarrow & 0[q_0Z_0q_1] & & & & \\
 & [q_1Xq_1] & \longrightarrow & 1 & & & &
\end{array}
$$

Gramatiku G lze dále zjednodušit na:
$G' = (\{S, [q_0Z_0q_0], [q_0Z_0q_1], [q_0Xq_1], [q_1Z_0q_0], [q_1Z_0q_1], [q_1Xq_1]\}, \{0,1\}, P, S)$,
přičemž množina pravidel P obsahuje následující pravidla:

$$
\begin{array}{llllllll}
P: & S & \longrightarrow & [q_0Z_0q_0] & | & [q_0Z_0q_1] & & \\
 & [q_0Z_0q_0] & \longrightarrow & & & 1[q_0Xq_1][q_1Z_0q_0] & | & \epsilon \\
 & [q_0Z_0q_1] & \longrightarrow & & & 1[q_0Xq_1][q_1Z_0q_1] & & \\
 & & & & & & & \\
 & [q_0Xq_1] & \longrightarrow & & & 1[q_0Xq_1][q_1Xq_1] & | & 0[q_1Xq_1] \\
 & [q_1Z_0q_0] & \longrightarrow & 0[q_0Z_0q_0] & & & & \\
 & [q_1Z_0q_1] & \longrightarrow & 0[q_0Z_0q_1] & & & & \\
 & [q_1Xq_1] & \longrightarrow & 1 & & & &
\end{array}
$$

respektive na:
$G'' = (\{S, [q_0Z_0q_0], [q_0Z_0q_1], [q_0Xq_1]\}, \{0,1\}, P, S)$,
přičemž množina pravidel P obsahuje následující pravidla:

$$
\begin{array}{llllllll}
P: & S & \longrightarrow & [q_0Z_0q_0] & | & [q_0Z_0q_1] & & \\
 & [q_0Z_0q_0] & \longrightarrow & & & 1[q_0Xq_1]0[q_0Z_0q_0] & | & \epsilon \\
 & [q_0Z_0q_1] & \longrightarrow & & & 1[q_0Xq_1]0[q_0Z_0q_1] & & \\
 & & & & & & & \\
 & [q_0Xq_1] & \longrightarrow & & & 1[q_0Xq_1]1 & | & 01
\end{array}
$$

případně až na:
$G''' = (\{S, [q_0Xq_1]\}, \{0,1\}, P, S)$,
přičemž množina pravidel P obsahuje následující pravidla:

$$
\begin{array}{llllll}
P: & S & \longrightarrow & 1[q_0Xq_1]0S & | & \epsilon \\
 & [q_0Xq_1] & \longrightarrow & 1[q_0Xq_1]1 & | & 01
\end{array}
$$

jinými slovy na:
$G'''' = (\{S, X\}, \{0,1\}, P, S)$,
přičemž množina pravidel P obsahuje následující pravidla:

$$
\begin{array}{llllll}
P: & S & \longrightarrow & 1X0S & | & \epsilon \\
 & X & \longrightarrow & 1X1 & | & 01
\end{array}
$$