Algebra II – jaro 2018 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{Z}, \otimes)$, kde $\otimes$ je binární operace definovaná pro $a, b \in \mathbb{Z}$ předpisem

$$a \otimes b = \begin{cases} a-1, & \text{pokud } a > b \geq 0, \\ b+1, & \text{pokud } 0 > a > b, \text{ nebo } 0 > b > a, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. (5 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\bot$ a všechna surjektivní zobrazení $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, na nichž je uspořádání dáno předpisem

$$\varphi \leq \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\colon \varphi(n) \leq \psi(n).$$

Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je svaz.

3. (5 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu $(L, \leq)$, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\bot$ a všechny konečné posloupnosti přirozených čísel $(a_i)_{i=1}^n$, kde $n, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, na nichž je uspořádání dáno následovně: pro $(a_i)_{i=1}^n$ a $(b_i)_{i=1}^m$ z L platí $(a_i)_{i=1}^n \leq (b_i)_{i=1}^m$ právě tehdy, když existují přirozená čísla $i_1, \ldots i_{n-1}$ splňující $1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-1} < m$ taková, že

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + \cdots + b_{i_1}, \\ a_2 &= b_{i_1+1} + \cdots + b_{i_2}, \\ &\vdots \\ a_n &= b_{i_{n-1}+1} + \cdots + b_m. \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

4. (5 bodů) Na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ uvažujme uspořádání dané předpisem

$$(A, B) \leq (C, D) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq C \;\&\; B \supseteq D.$$

Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je algebraický svaz.

5. (10 bodů) Pro libovolný jazyk $L \subseteq \{a, b\}^*$ nad dvoupísmennou abecedou $\{a, b\}$ definujme množinu

$$\mathrm{ps}(L) = \{\, (u, w) \in \{a, b\}^* \times \{a, b\}^* \mid \exists\, v \in \{a, b\}^*\colon uvw \in L \,\}.$$

Rozhodněte, zda relace $\sim$ definovaná předpisem

$$K \sim L \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ps}(K) = \mathrm{ps}(L),$$

pro $K, L \subseteq \{a, b\}^*$, je kongruencí algebry $(\mathcal{P}(\{a, b\}^*), \cup, \cdot, {}^{-*})$ všech jazyků nad $\{a, b\}$ se standardními racionálními operacemi.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z nulárního operačního symbolu 1 a ternárního operačního symbolu f. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$, jejíž nosnou množinou je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a operace jsou definovány předpisy $1^{\mathcal{A}} = (0, 1)$ a

$$f^{\mathcal{A}}\big((a, b), (c, d), (g, h)\big) = \big(a + c - g, 2^{c-g}(b - a) - 2^{-g}(c - d - g + h) + a + c - g\big)$$

pro libovolná $a, b, c, d, g, h \in \mathbb{R}$.
a) $f\big(f(x, y, z), z, y\big) = x$,
b) $f\big(1, f(1, x, 1), x\big) = 1$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech monounárních algeber $\mathcal{A}$ takových, že každý homomorfismus $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je surjektivní.