Algebra II – jaro 2019 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, *, \bullet)$, kde $*$ a $\bullet$ jsou binární operace definované předpisy

$$a * b = \begin{cases} a + 2b, & \text{pokud je } b \text{ liché,} \\ a + 2, & \text{pokud jsou } a \text{ i } b \text{ sudá,} \\ a, & \text{pokud je } a \text{ liché a } b \text{ sudé,} \end{cases}$$

$$a \bullet b = \begin{cases} \operatorname{nsd}(a, b), & \text{pokud jsou } a \text{ i } b \text{ lichá,} \\ a - 2, & \text{pokud je } a \text{ sudé, } a \neq 2 \text{ a } b \text{ liché,} \\ b, & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. (5 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou všechny posloupnosti přirozených čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, přičemž $(a_i)_{i=1}^{\infty} \leq (b_i)_{i=1}^{\infty}$ platí právě tehdy, když pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí $b_i \geq a_i$ a posloupnost $(b_i - a_i)_{i=1}^{\infty}$ je neklesající (tj. pro všechna $i < j$ platí $b_i - a_i \leq b_j - a_j$). Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je svaz.

3. (5 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\perp$ a všechny posloupnosti celých čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, které jsou buď rostoucí (tj. pro všechna $i < j$ platí $a_i < a_j$), nebo klesající (tj. pro všechna $i < j$ platí $a_i > a_j$), přičemž $(a_i)_{i=1}^{\infty} \leq (b_i)_{i=1}^{\infty}$ platí právě tehdy, když pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí $a_i \leq b_i$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

4. (5 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou nejmenší prvek $\perp$ a všechny binární relace ρ na množině $\mathbb{N}$ takové, že pro všechna $a \in \mathbb{N}$ existuje $b \in \mathbb{N}$ splňující $(b, a) \in \rho$, přičemž tyto relace jsou uspořádané inkluzí. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je algebraický svaz.

5. (10 bodů) Nechť $A = \mathcal{P}(\{a, b\}^*)$ je množina všech jazyků nad dvoupísmennou abecedou. Na A uvažujme unární operace f, g a h, kde jazyk $f(L)$ sestává ze všech faktorů slov jazyka $L \in A$, jazyk $g(L)$ sestává ze všech prefixů slov jazyka L a jazyk $h(L)$ sestává ze všech slov z $\{a, b\}^*$, jejichž každý faktor patří do L. Rozhodněte, zda relace $\sim$ definovaná předpisem

$$K \sim L \quad \Longleftrightarrow \quad g(K) = g(L)$$

je kongruencí algebry a) (A, f), b) (A, h).
(Faktorem slova w rozumíme podslovo tvořené po sobě následujícími písmeny slova w a prefixem rozumíme faktor tvořený několika počátečními písmeny.)

6. (10 bodů) Uvažujme typ algeber sestávající z unárního operačního symbolu f a tří binárních operačních symbolů $\bullet$, $*$ a $\oplus$. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$, jejíž nosnou množinou A je množina všech podsvazů svazu $(\mathbb{N}, |)$, operace $\bullet^{\mathcal{A}}$ a $*^{\mathcal{A}}$ jsou definovány jako supremum a infimum ve svazu $(A, \subseteq)$, operace $f^{\mathcal{A}}$ je pro libovolný podsvaz $K \in A$ definována předpisem

$$f^{\mathcal{A}}(K) = \{\, a \in \mathbb{N} \mid \exists\, b \in K \colon a \text{ dělí } b \,\}$$

a pro libovolné podsvazy $K, L \in A$ je $K \oplus^{\mathcal{A}} L$ definováno jako podsvaz generovaný množinou $\{\, \mathrm{nsn}(a, b) \mid a \in K,\ b \in L \,\}$, tj. $K \oplus^{\mathcal{A}} L$ obsahuje právě čísla

$$\mathrm{nsd}(\mathrm{nsn}(a_1, b_1), \ldots, \mathrm{nsn}(a_n, b_n))$$

pro libovolná $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in K$ a $b_1, \ldots, b_n \in L$.
a) $(x \bullet y) * z = (x * z) \bullet (y * z)$,
b) $f(x) \oplus f(y) = f(x \oplus y)$.

7. (15 bodů) Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů L takových, že pro každý prvek $a \in L$, který není nejmenší, existuje prvek $b \in L$ pokrytý a (tj. takový, že $b < a$ a neexistuje $c \in L$ splňující $b < c < a$).