Algebra II – jaro 2019 – 4. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

Všechna uspořádání posloupností v tomto zadání jsou obvyklá uspořádání po složkách, tj. $(r_n)_{n=1}^{\infty} \leq (s_n)_{n=1}^{\infty}$ platí právě tehdy, když $r_n \leq s_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \oplus)$, kde $\oplus$ je binární operace definovaná předpisem

$$(a,b) \oplus (c,d) = \begin{cases} (a,b) & \text{pokud } a = c \text{ a } b = 1, \\ (a,b-1) & \text{pokud } a = c \text{ a } b \geq 2, \\ (a,b+1) & \text{pokud } a < c, \\ (c+1,d) & \text{pokud } a > c. \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou všechny posloupnosti reálných čísel $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, které jsou zpočátku rostoucí a poté nerostoucí (tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k, \ell \in \mathbb{N}$ platí implikace $k < \ell \leq n \implies r_k < r_\ell$ a $n \leq k < \ell \implies r_k \geq r_\ell$). Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je svaz.

3. **(5 bodů)** Nechť A je množina všech nekonečných množin přirozených čísel, které neobsahují žádná soudělná čísla. Rozhodněte, zda přidáním nejmenšího a největšího prvku k uspořádané množině $(A, \subseteq)$ vznikne úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu $(\{\, (A,B) \mid A \subseteq B \subseteq \mathbb{N} \,\} \cup \{\bot\}, \leq)$, kde $\bot$ je nejmenší prvek a na ostatních prvcích je uspořádání dáno předpisem

$$(A,B) \leq (C,D) \quad \iff \quad A \supseteq C \ \&\ B \subseteq D.$$

Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Na množině $\mathbb{N}^*$ všech konečných slov nad abecedou $\mathbb{N}$ uvažujme binární operaci zřetězení $\cdot$ a binární operaci $\odot$, která každým dvěma slovům přiřadí nejdelší slovo, které je prefixem obou. Pro slovo w označme $f(w)$ slovo vzniklé z w ponecháním pouze prvního výskytu každého písmene. Rozhodněte, zda relace $\sim$ definovaná předpisem

$$v \sim w \quad \iff \quad f(v) = f(w)$$

je kongruencí algebry a) $(\mathbb{N}^*, \cdot)$, b) $(\mathbb{N}^*, \odot)$.
(Prefix slova w je libovolné slovo u takové, že existuje slovo v splňující $uv = w$.)

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající ze dvou unárních operačních symbolů f a g a jednoho binárního symbolu $\otimes$. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$, jejíž nosnou množinou je množina $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ všech množin posloupností přirozených čísel a operace jsou pro libovolné množiny $M, N \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definovány předpisy

$$f^{\mathcal{A}}(M) = \{\, (1, a_1, a_2, a_3, \dots) \mid (a_1, a_2, a_3, \dots) \in M \,\},$$
$$g^{\mathcal{A}}(M) = \{\, (a_2, a_3, \dots) \mid (a_1, a_2, a_3, \dots) \in M \,\},$$
$$M \otimes^{\mathcal{A}} N = \{\, p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists q \in M \ \exists r \in N \colon q \leq p \leq r \,\}.$$

a) $f(x) \otimes f(y) = f(x \otimes y)$,
b) $g(x) \otimes g(x) = g(x \otimes x)$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů, které neobsahují nekonečný rostoucí řetězec $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.