Algebra II – jaro 2020 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(A, *)$, kde A je množina všech neprázdných konečných množin celých čísel a $*$ je binární operace na A definovaná předpisem
$$M * N = \begin{cases} (M-1) \cup N, & \text{pokud } \max M < \max N, \\ M-1, & \text{pokud } \max M = \max N, \\ M \setminus \{\max N\}, & \text{pokud } \max M > \max N, \end{cases}$$
kde $M - 1 = \{\, m-1 \mid m \in M \,\}$.

2. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou všechny posloupnosti nezáporných celých čísel $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, které mají jen konečně mnoho nenulových složek a součet těchto složek je sudé číslo, přičemž $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \leq (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ platí právě tehdy, když pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí $a_i \leq b_i$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je svaz.

3. **(5 bodů)** Na množině všech podmnožin množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je definována relace ekvivalence předpisem
$$A \sim B \quad\iff\quad \text{symetrický rozdíl } A \text{ a } B \text{ je konečný.}$$
Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/{\sim}, \leq)$ s uspořádáním daným předpisem
$$[A]_\sim \leq [B]_\sim \quad\iff\quad \text{množina } A \setminus B \text{ je konečná,}$$
pro libovolné podmnožiny $A, B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda dědičné podmnožiny uspořádané množiny $(\mathbb{R}, \leq)$ tvoří vzhledem k uspořádání inkluzí algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Nechť $A = \{a, b, c, d\}$ je čtyřpísmenná abeceda. Definujme zobrazení $N\colon A^* \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $I\colon A^* \to \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ předpisy
$$N(u) = (|u|_a - |u|_b, |u|_c - |u|_d),$$
$$I(v) = \{\, N(u) \mid u \text{ je prefixem } v \,\}.$$
Dále uvažujme homomorfismus $f\colon (A^*, \cdot) \to (A^*, \cdot)$ zadaný na generátorech předpisy $f(a) = c$, $f(b) = b$, $f(c) = a$ a $f(d) = d$. Rozhodněte, zda relace $\sim$ definovaná předpisem
$$v \sim w \quad\iff\quad I(v) = I(w) \;\&\; N(v) = N(w)$$
je kongruencí algebry a) $(A^*, \cdot)$, b) (A^*, f).

(Notace $|u|_a$ označuje počet výskytů písmene a ve slově u. Prefixem slova v je libovolné slovo $u \in A^*$ takové, že $v = uw$ pro nějaké slovo w.)

6. (10 bodů) Uvažujme typ algeber sestávající z unárního operačního symbolu f a binárního operačního symbolu $\bullet$. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$, jejíž nosnou množinou A je množina všech parciálních injektivních zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a operace $f^{\mathcal{A}}$ a $\bullet^{\mathcal{A}}$ jsou pro všechna $\rho, \sigma \in A$ definovány předpisy $f^{\mathcal{A}}(\rho) = \rho^{-1}$ a $\rho \bullet^{\mathcal{A}} \sigma = \rho \circ \sigma$.
a) $f(x) \bullet \big((x \bullet y) \bullet f(y)\big) = y \bullet \big((f(y) \bullet f(x)) \bullet x\big)$,
b) $f(x) \bullet \big((x \bullet y) \bullet f(y)\big) = f(x) \bullet \big((y \bullet f(y)) \bullet x\big)$.

7. (15 bodů) Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů $(L, \leq)$, které jsou izomorfní svému duálu $(L, \geq)$.