Algebra II – jaro 2022 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem

$$a * b = \begin{cases} a+2, & \text{pokud } a \text{ je sudé, nebo } a \text{ je liché a } b \text{ sudé splňující } b < a, \\ a-2, & \text{pokud } a \text{ i } b \text{ jsou lichá a } a \neq 1, \\ b, & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou všechny podmnožiny uspořádané množiny $(\mathbb{N}, |)$, které mají konečně mnoho minimálních prvků. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$ je svaz.

3. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\perp$ a všechny posloupnosti reálných čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ takové, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ existuje $j > i$ splňující $a_i \geq a_j$, přičemž $(a_i)_{i=1}^{\infty} \leq (b_i)_{i=1}^{\infty}$ platí právě tehdy, když pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je splněno $a_i \leq b_i$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Na množině $\{\, (A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq B \,\}$ uvažujme uspořádání dané předpisem

$$(A, B) \leq (C, D) \quad \iff \quad A \subseteq C \;\&\; B \supseteq D.$$

   Rozhodněte, zda přidáním největšího prvku k této uspořádané množině vznikne algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Uvažujme algebru $\mathcal{A} = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \cdot)$, kde $\cdot$ je obvyklé násobení funkcí, tj. $(f \cdot g)(r) = f(r) \cdot g(r)$. Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda definuje kongruenci algebry $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} f \sim g \quad &\iff \quad \ker(f) = \ker(g), \\ f \approx g \quad &\iff \quad \forall r \in \mathbb{R} \colon |f(r)| = |g(r)|. \end{aligned}$$

6. **(10 bodů)** Pro každou z identit $x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot y \cdot y \cdot x$, $x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y$ rozhodněte, zda je splněna v pologrupě $(\{a, b\}^+, \cdot)/\langle (abb, ab), (aba, aab) \rangle_{\mathrm{cong}}$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech ohraničených svazů $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ takových, že každý jejich prvek, který není srovnatelný se všemi prvky, má komplement.