Úvod do rozvrhování (dokončení)

14. února 2022

Omezení β

- Precedenční podmínky *prec*
  - lineární posloupnost, stromová struktura
  - pro úlohy a, b píšeme $a \rightarrow b$, což znamená $S_a + p_a \leq S_b$
  - příklad: montáž kola
- Přerušení úlohy *(preemptions)* *pmtn*
  - při příchodu úlohy s vyšší prioritou je současná úloha přerušena
- Vhodnost stroje M_j
  - podmnožina strojů M_j, na níž lze provádět úlohu j
  - přiřazení místností: postačující velikost učebny
  - hry: počítač s HW grafickou knihovnou
- Omezení na pracovní sílu W, W_l
  - do problému zavedeme další typ zdroje
  - stroje mohou potřebovat operátory a úlohy lze provádět jen tehdy, pokud jsou dostupní W operátorů
  - mohou existovat různé skupiny operátorů se specifickou kvalifikací W_l je počet operátorů ve skupině l

Omezení (pokračování) β

- Směrovací *(routing)* omezení
  - udávají, na kterých strojích musí být úloha prováděna
  - pořadí provádění úlohy v multi-operačních problémech
    - job shop problém: pořadí operací předem stanoveno
    - open shop problém: pořadí operací úlohy (*route for the job*) stanoveno až při rozvrhování
- Nastavovací *(setup)* doba a cena $s_{ijk}, c_{ijk}, s_{jk}, c_{jk}$
  - závislé na posloupnosti provádění
  - s_{ijk} čas nutný pro provádění úlohy k po úloze j na stroji i
  - c_{ijk} cena nutná pro provádění úlohy k po úloze j na stroji i
  - s_{jk}, c_{jk} čas/cena nezávislý na stroji
  - příklady
    - plnění limonád do lahví
    - problém obchodního cestujícího $1|s_{jk}|C_{\max}$

Omezení (pokračování) β

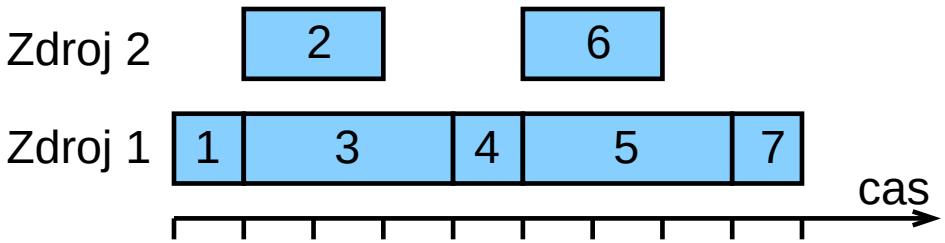
- Výroba na objednávku a na sklad
  - výroba zboží na sklad, pokud je u něj záruka spotřeby
    nutno uvážit cenu za skladování
  - výroba zboží na objednávku vynucuje úvahu termínů dokončení
    vyprodukované množství závislé na zákazníkovi
- Skladovací prostor a doba čekání při výrobě
  - omezené množství prostoru při výrobě
  - horní hranice počtu úloh čekajících ve frontě na stroj
  - blokování: úloha je zablokována na současném stroji, protože fronta na následujícím stroji je plná
- ...

Optimalizace: výkon a *makespan* γ

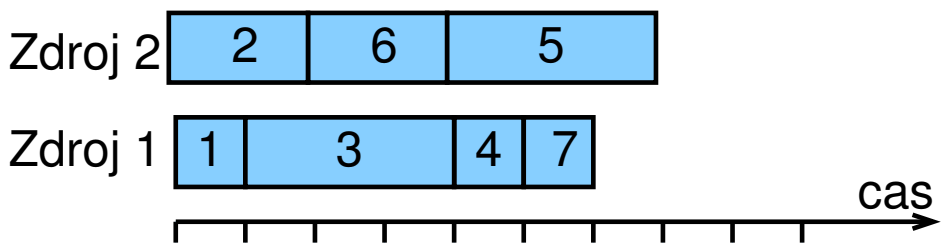
- Makespan $\mathbf{C_{max}}$: maximální čas konce úloh

$$\mathbf{C_{max}} = \max(C_1, \ldots, C_n)$$

- Příklad: $C_{max} = \max\{1, 3, 4, 5, 8, 7, 9\} = 9$



- Cíl: minimalizace makespan často
  - maximalizuje výkon (*throughput*)
  - zajišťuje rovnoměrné zatížení strojů (*load balancing*)
  - příklad: $C_{max} = \max\{1, 2, 4, 5, 7, 4, 6\} = 7$



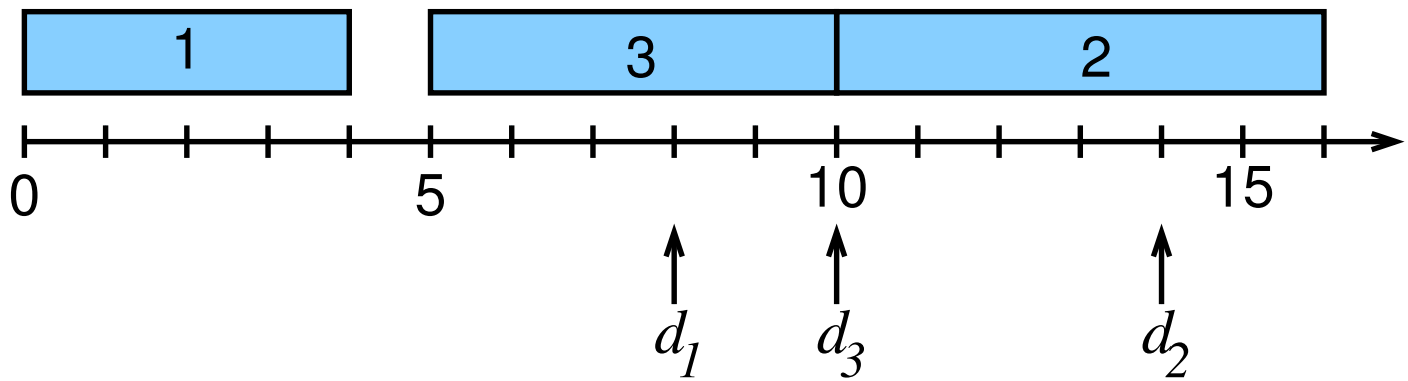
- Velmi často používané a základní kritérium

Optimalizace: zpoždění γ

- Zpoždění *(lateness)* úlohy j: $L_j = C_j - d_j$
- Maximální zpoždění $\mathbf{L_{max}}$

$$\mathbf{L_{max}} = \max(L_1, \ldots, L_n)$$

- Cíl: minimalizace maximálního zpoždění
- Příklad:



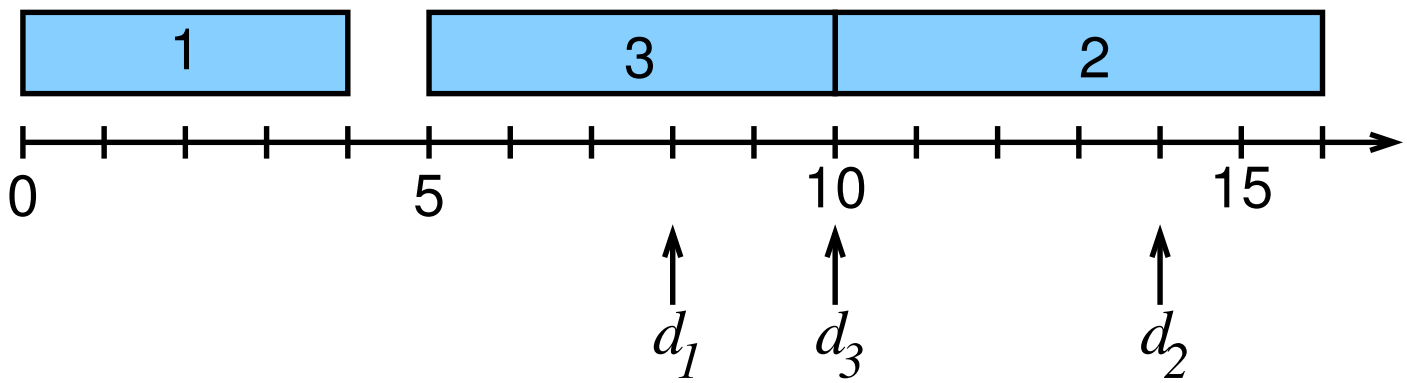
$$\begin{aligned} L_{max} &= \max(L_1, L_2, L_3) = \\ &= \max(C_1 - d_1, C_2 - d_2, C_3 - d_3) = \\ &= \max(4 - 8, 16 - 14, 10 - 10) = \\ &= \max(-4, 2, 0) = 2 \end{aligned}$$

Optimalizace: nezáporné zpoždění γ

- Nezáporné zpoždění *(tardiness)* úlohy j: $T_j = \max(C_j - d_j, 0)$
- Cíl: minimalizace celkového zpoždění

$$\sum_{j=1}^{n} T_j$$ celkové zpoždění

- Příklad:

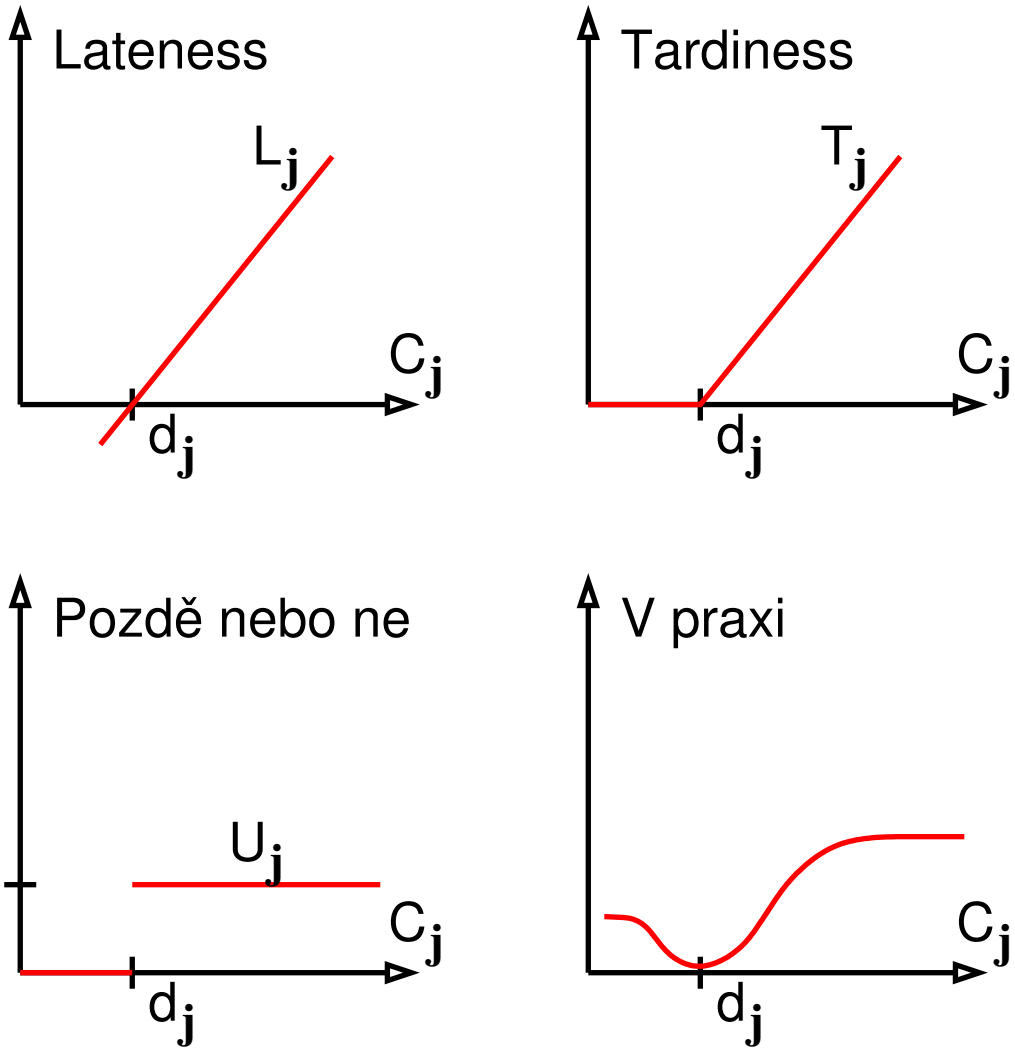


$$T_1 + T_2 + T_3 = \max(C_1 - d_1, 0) + \max(C_2 - d_2, 0) + \max(C_3 - d_3, 0) =$$
$$\max(4-8, 0) + \max(16-14, 0) + \max(10-10, 0) = 0+2+0 = 2$$

- Cíl: minimalizace celkového váženého zpoždění

$$\sum_{j=1}^{n} w_j T_j$$ celkové vážené zpoždění

Termín dokončení a grafy γ



Optimalizace: skladování při výrobě γ

- Cena za skladování vyrobeného zboží
- Cena za skladování při výrobě
  (Work-In-Process inventory cost)
  - příliš velké množství právě vyráběného zboží může zaplnit linku
  - příliš dlouho odložené zboží může být znehodnoceno
- Délka skladování při výrobě svázána s časy konce úloh

  $\Rightarrow$ minimalizace součtu časů konců úloh

$$\sum_{j=1}^{n} C_j$$

  $\Rightarrow$ minimalizace váženého součtu časů konců úloh

$$\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$$

  celková hodnota daná skladováním při výrobě

Další optimalizační kritéria γ

- Robustnost
  - robustnější rozvrh vyžaduje méně změn při změně problému (porucha stroje, dopravní špička)
- Cena za nastavení *(setup)*
  - cena za připravení letadla na odlet
    (čištění, zásobování, doplnění pohonných hmot)
- Cena za pracovní sílu
  - cena za přiřazení zaměstnanců na konkrétní směnu

V problému často řada optimalizačních kritérií

- multi-kriteriální rozvrhování
  - *Pareto* optimalizace
- žádoucí vztah mezi nimi nemusí být jasně definovaný
  - co je důležitější?
- ani samotná kritéria nemusí být jasně definována
  - jak daný požadavek reprezentovat kritériem?

Polynomiální a nedeterministicky polynomiální problémy

- Polynomiální problémy
  - existuje algoritmus polynomiální složitosti pro řešení problému
- NP a NP-úplné problémy
  - řešitelné nedeterministickým polynomiálním algoritmem
  - potenciální řešení lze ověřit v polynomiálním čase
  - v nejhorším případě exponenciální složitost (pokud neplatí P=NP)
  - NP-úplný problém
    - libovolný problém v NP se na něj dá polynomiálně redukovat
- Příklady:
  - Polynomiální
    - $1||L_{\max}$ $P|pmtn|C_{\max}$ $1||\sum w_j C_j$
  - NP
    - $1|r_j|L_{\max}$ $P2||C_{\max}$ $P2||\sum w_j C_j$

Řídící pravidla

14. února 2022

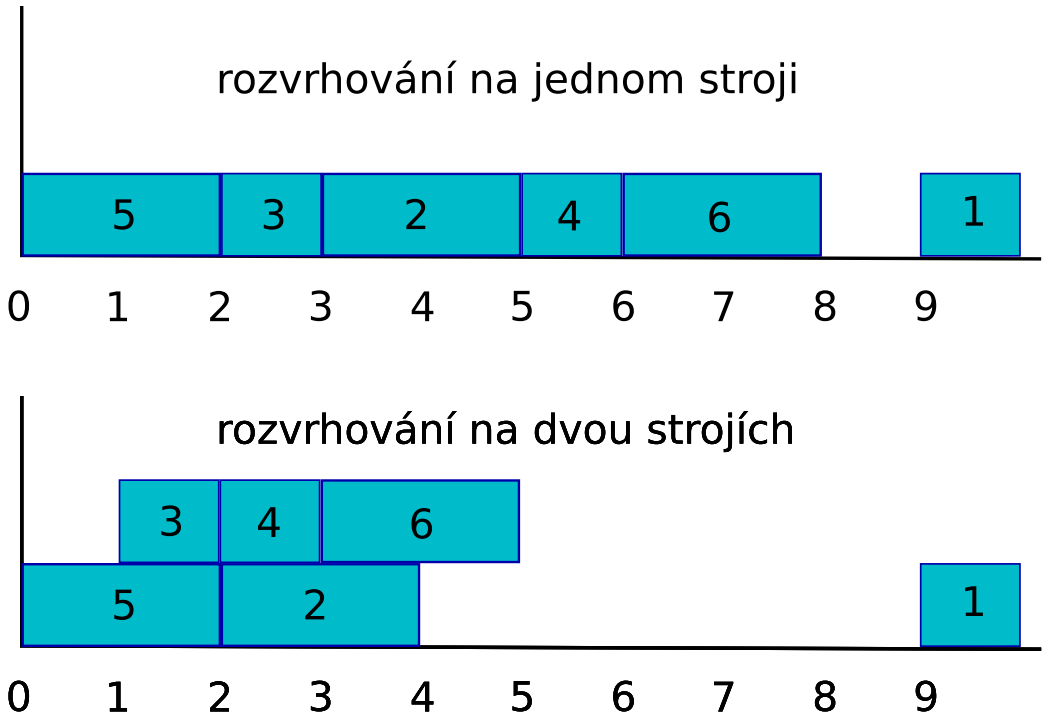
Řídící pravidla *(dispatching rules)*

Řídící pravidlo

- určuje pořadí (prioritu), ve kterém mají být úlohy prováděny
  - pokud má více úloh stejnou prioritu, úlohy jsou seřazeny náhodně (nebo např. dle čísla úlohy)
- jakmile se některý stroj uvolní, je vybrána nejprioritnější úloha

Příklad: použijte pro seřazení úloh nejdřívější termín dostupnosti r_j

úlohy	1	2	3	4	5	6
r_j	9	2	1	2	0	3
p_j	1	2	1	1	2	2

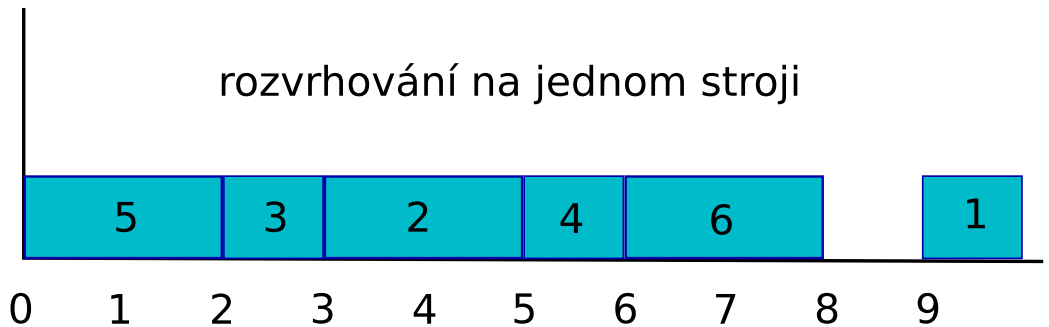


Pravidla s termíny dostupnosti r_j a dokončení d_j

- Nejdřívější termín dostupnosti *(Earliest Release Date first ERD)*
  - ekvivalentní nejdříve-příjde-nejdříve-obsloužen *(First-Come-First-Serve)*
  - minimalizuje odlišnosti v době čekání na stroji

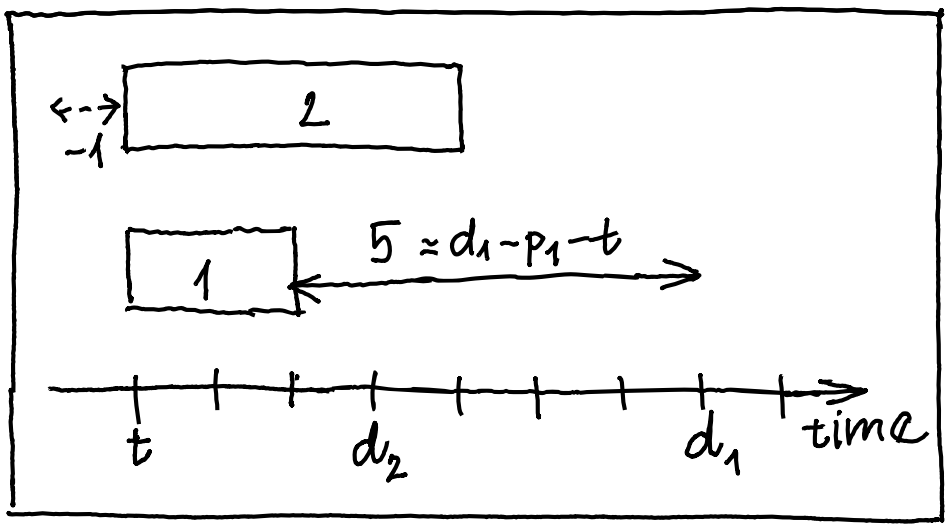
- Nejdřívější termín dokončení *(Earliest Due Date first EDD)*
  - směřuje k minimalizaci maximálního zpoždění mezi čekajícími úlohami
  - optimální pro $1||L_{max}$ (všechny úlohy dostupné na začátku)
  - pozor, i zde (zejména stejně jako u všech pravidel) musíme brát v úvahu termín dostupnosti, tj. úlohu lze plánovat teprve když je dostupná!!!
    - př. $r_2 = 3, d_2 = 5, \quad r_3 = 0, d_3 = 6$ – dříve plánujeme úlohu 3

úlohy	1	2	3	4	5	6
r_j	9	3	0	2	0	6
p_j	1	2	1	1	2	2
d_j	10	5	6	9	2	8



Pravidla s termíny dostupnosti: minimální rezerva

- Minimální rezerva *(Minimum Slack first MS)*
  - $\max(d_j - p_j - t, 0)$
    - d_j termín dokončení
    - p_j doba provádění
    - t aktuální čas
  - funkci max používáme, abychom neměli záporné hodnoty pro úlohy, které už to určitě nestihnou
  - minimalizace kriterií svázaných s termínem dokončení,
    tj. maximální zpoždění

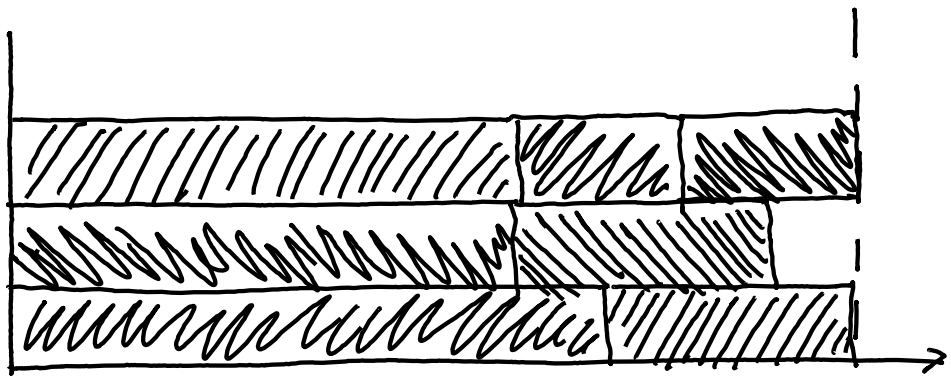


Statická vs. dynamická pravidla

- Statická pravidla nejsou závislá na probíhajícím čase
  - pořadí se spočítá jako funkce závislá na úloze a/nebo stroji
  - pořadí nám definuje prioritní frontu úloh
  - př. nejdřívější termín dostupnosti
- Dynamická pravidla jsou závislá na čase
  - nutno zahrnout do výpočtu funkce i aktuální čas
  - uspořádání úloh závisí na čase $\Rightarrow$ v každém čase je nutné určit znovu úlohu s nejvyšší prioritou a tu zpracováváme
  - př. minimální rezerva

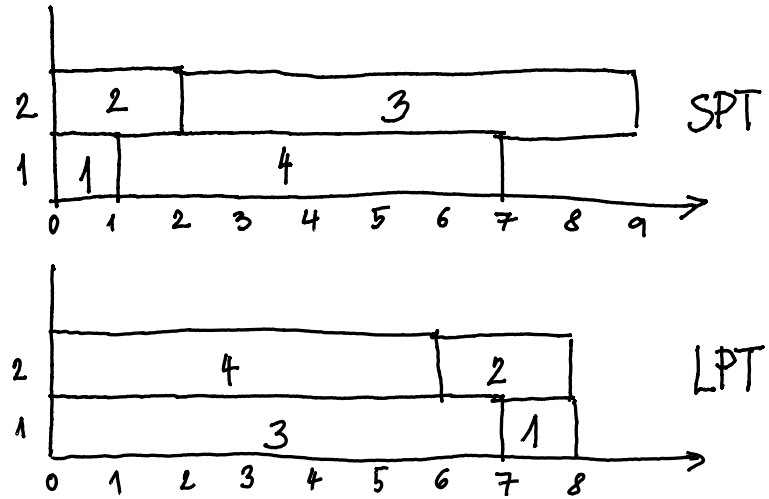
Pravidla s dobou trvání p_j

- Nejdelší doba trvání *(Longest Processing Time first LPT)*
  - směřuje k rovnoměrnému zatížení paralelních strojů,
    tj. k minimalizaci makespan
  - myšlenka: kratší úlohy lze později využít pro vyrovnání zátěže na konci; jakmile jsou úlohy přiřazeny na stroje, tak je lze přeuspořádat bez změny zatížení



Pravidla s dobou trvání p_j

- Nejkratší doba trvání *(Shortest Processing Time first SPT)*
  - směřuje k minimalizaci součtu časů konců úloh, tj. WIP (Work In Process, cena za sklad při výrobě)



- Vážená nejkratší doba trvání *(Weighted Shortest Processing Time first WSPT)*
  - navíc w_j oproti SPT (řadím dle w_j/p_j)
  - minimalizace vážených součtu časů konců úloh, tj. WIP
  - optimální pro jeden stroj, kde jsou všechny úlohy dostupné na začátku ($r_j = 0$ pro každou úlohu j)

Další řídící pravidla

- Kritická cesta *(Critical Path CP)*
  - vhodné pro precedenční omezení
  - vybírá úlohu, která je první v nejdelším řetězci dob provádění v grafu úloh daném precedencemi
  - vede k minimalizaci makespan
- Nejméně flexibilní úloha *(Least Flexible Job LFJ first)*
  - při zadání množiny vhodných strojů
  - vybírá se úloha, která může být prováděna na nejmenším počtu strojů (tj. nejméně alternativ)
  - vede k minimalizaci makespan
- Náhodné pořadí *(Service in Random Order SIRO)*
  - náhodný výběr úloh

Řídící pravidla: diskuse

- Jednoduchá na implementaci
- Optimální ve speciálních případech
- Zaměřeny na jedno optimalizační kritérium
- Kombinování několika řídících pravidel: kompozitní řídící pravidla

- Použití v praxi
  - pro řadu problémů příliš triviální
    - i tady lze např. použít jako generátor iniciálního řešení
    - nebo jako metodu pro řešení podproblémů
  - používá se pro složité problémy s vysokými nároky na propustnost
    - např. počet naplánovaných aktivit za vteřinu

    nebo pro problémy s vysokým stupněm dynamiky
    - např. plánování úloh na počítače
      (neznámá doba trvání, příchody nových úloh, výpadky strojů)