# Plánování projektu

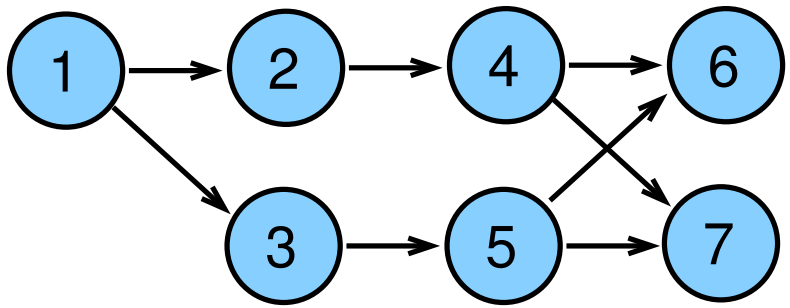
1. dubna 2022

# Problémy plánování projektu

- Zprostředkování, instalace a testování rozsáhlého počítačového systému
  - projekt zahrnuje
    - evaluace a výběr hardware, vývoj software, nábor a školení lidí, testování a ladění systému, ...
  - precedenční vztahy
    - některé úlohy mohou být prováděny paralelně
    - úloha musí být realizována až po dokončení jiných úloh
  - cíl: minimalizovat čas na realizaci celého projektu
- Příklady dalších problémů
  - stavba nemovitostí, konstrukce center elektráren, vojenský průmysl

# Plánování projektu

- Základní problém plánování projektu
  - precedenční podmínky
  - paralelní stroj s neomezeným počtem strojů
  - minimalizace maximálního času konce úloh *(makespan)*
  - relativně jednoduché na řešení



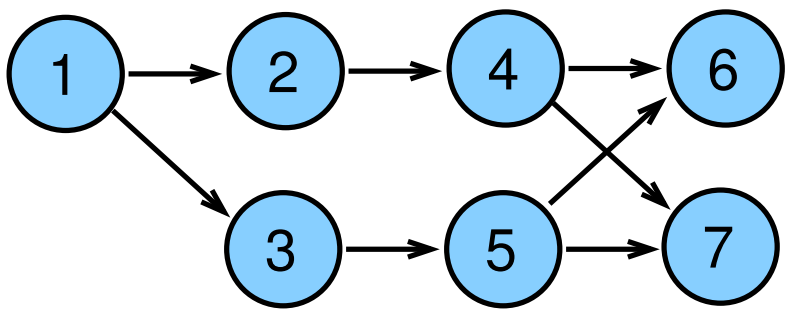

- Rozšíření
  - variabilní doba trvání (spojena s cenou provádění)
    - optimalizace: kompromis mezi cenou na ukončení projektu a cenou za zkrácení délky úloh
  - pracovní síla (skupiny operátorů s odlišnou specializací)
    - při sdílení omezeného množství operátorů nutno uvažovat disjunktivní hrany

    $\Rightarrow$ komplexní problém, jehož řešení je velmi obtížné

# Reprezentace projektu: úloha jako uzel

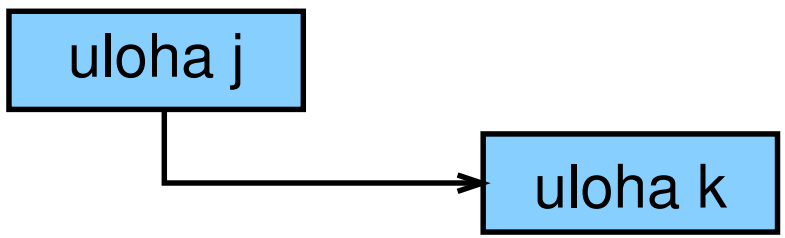
- Reprezentace: úloha jako uzel
  - hrany reprezentují precedenční podmínky
  - síť neobsahuje žádné orientované cykly

| Úloha | Doba trvání | Předchůdci |
|---|---|---|
| 1 | 2 | – |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 2 |
| 5 | 2 | 3 |
| 6 | 1 | 4,5 |
| 7 | 3 | 4,5 |



# Výhodnější reprezentace

- Běžně používana reprezentace úloha jako hrana
- Výhodnější ale úloha jako uzel
  - nejsou nutné redundantní hrany (pomocné úlohy) pro korektní vyjádření precedencí
  - úloha jako uzel lze převést na úloha jako obdelník
    - horizontální strany obdelníku použity jako časové osy odpovídající době provádění úlohy



# Popis problému

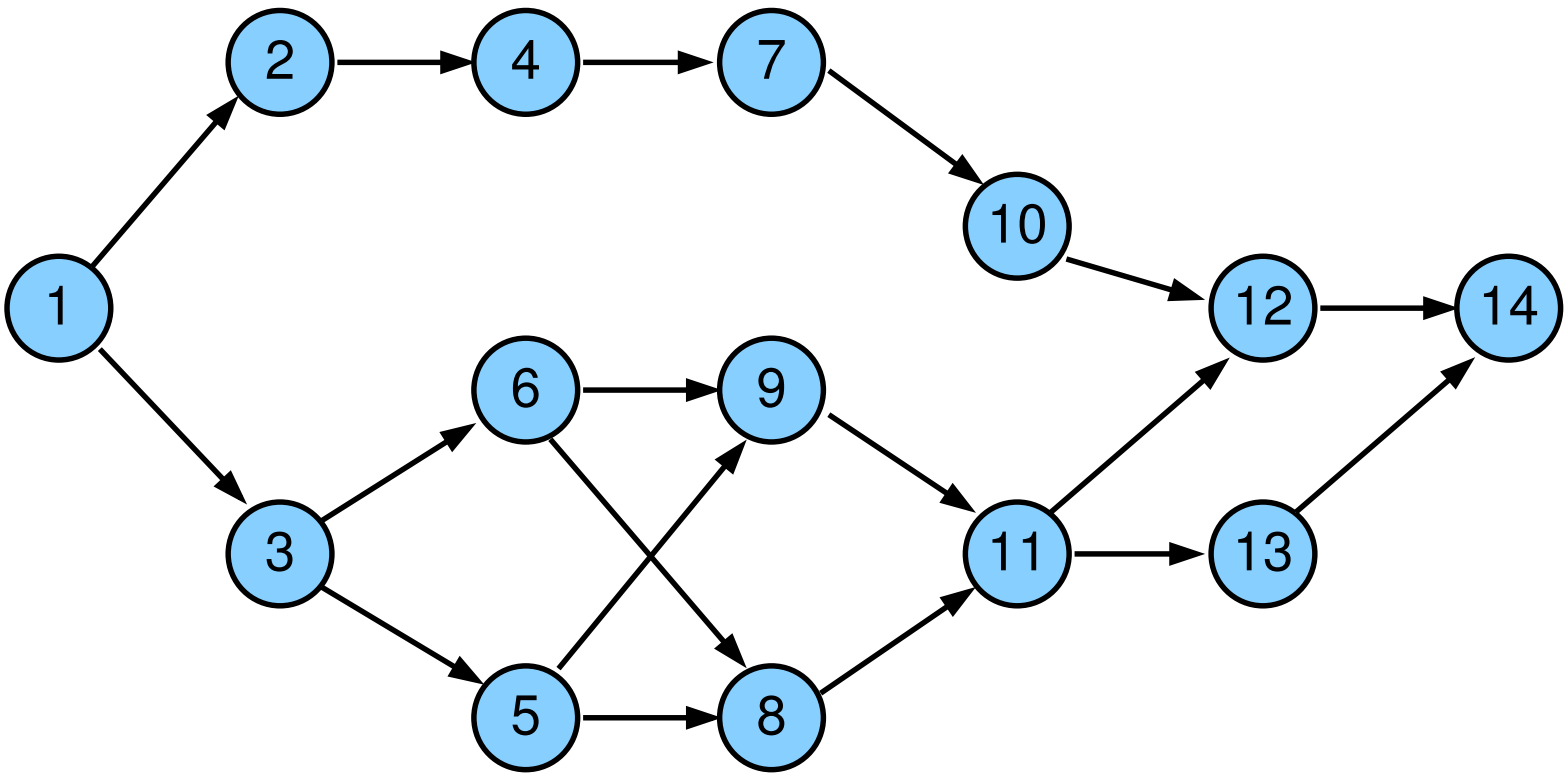
- Popis problému
  - $m$ paralelně zapojených strojů
  - $n$ úloh s precedenčními omezeními
  - doba provádění $p_j$
  - objektivní funkce: minimalizace maximálního času konce úloh *(makespan)*
- $P_\infty|prec|C_{max}$ (a $m \geq n$) polynomiální složitost, metoda kritické cesty
  $P_m|prec|C_{max}$ $2 \leq m < n$ NP úplný problém
- Značení
  - $S'_j$ nejdřívější startovní čas úlohy $j$
    $C'_j = S'_j + p_j$ nejdřívější koncový úlohy $j$
  - $S''_j$ nejpozdější startovní čas úlohy $j$
    $C''_j$ nejpozdější koncový čas úlohy $j$
  - $Prec_j$ (přímí) předchůdci úlohy $j$
    $\forall k \in Prec_j$ všechny úlohy $k$, které předcházejí úlohu $j$
    $\forall j : k \in Prec_j$ všechny úlohy $j$, které následují úlohu $k$

# Metoda kritické cesty

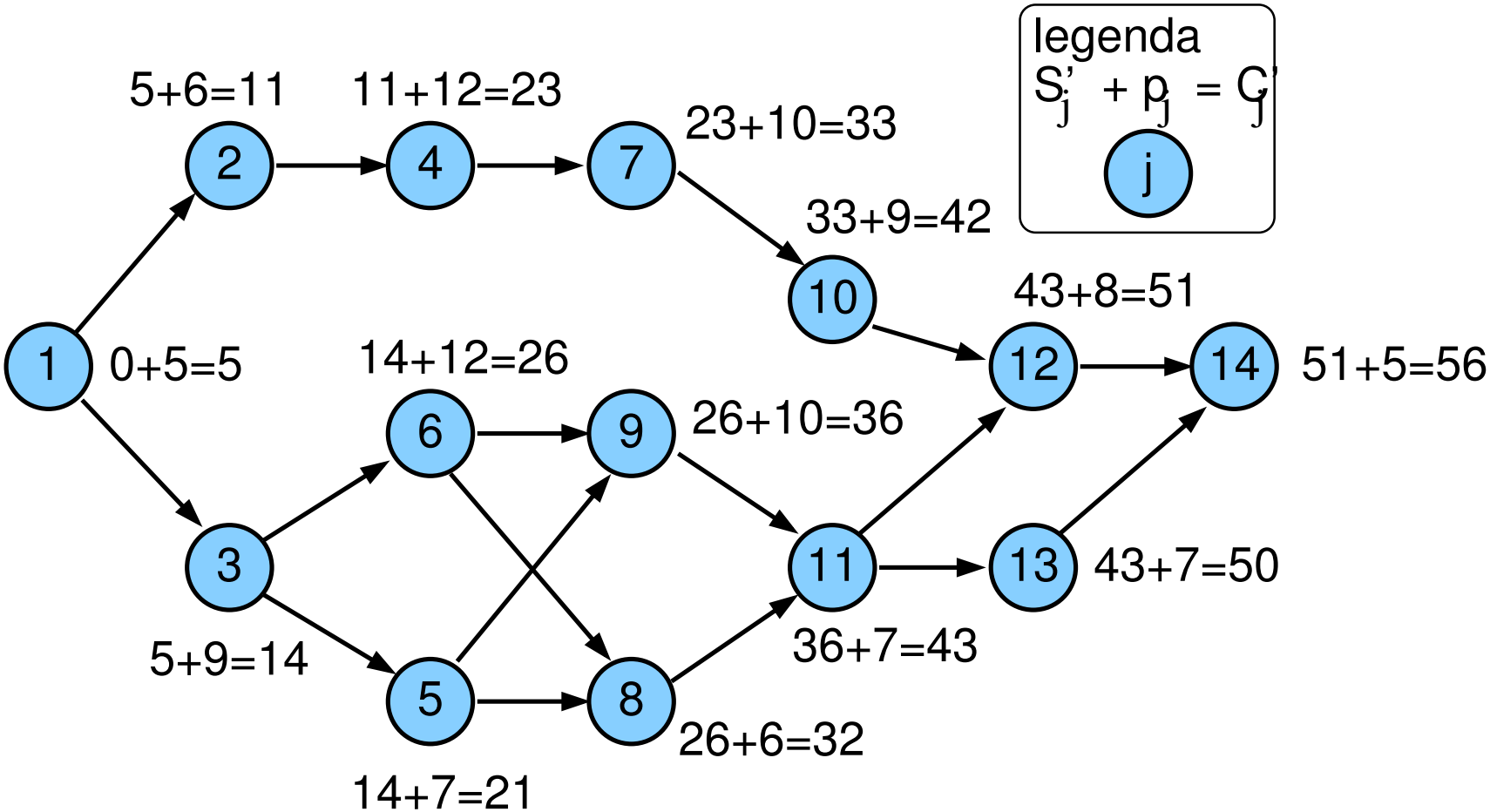
- Popis algoritmu pro nalezení kritické cesty
  - dopředná procedura
    - start v čase 0
    - výpočet nejdřívějšího startovního času každé úlohy
    - čas dokončení poslední úlohy je *makespan*
  - zpětná procedura
    - start v čase rovném *makespan*
    - výpočet nejpozdějšího startovního času, aby byl realizován tento *makespan*
- Úloha s rezervou *(slack job)*
  - její startovní čas může být odložen aniž je navýšen *makespan*
  - úloha, jejichž nejdřívější startovní čas je menší než nejpozdější startovní čas
- Kritická úloha
  - úloha, která nesmí být odložena
  - úlohy, jejichž nejdřívější startovní čas je roven nejpozdějšímu startovnímu čas
- Kritická cesta
  - řetěz úloh začínající v čase 0 a končící v čase $C_{max}$
  - v grafu může existovat více kritických cest
    kritické cesty se mohou částečně překrývat
  - graf kritických cest $G_{CP}$: podgraf daný množinou kritických úloh a kritických cest

# Kritická cesta: zadání příkladu

| **j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{p_j}$ | 5 | 6 | 9 | 12 | 7 | 12 | 10 | 6 | 10 | 9 | 7 | 8 | 7 | 5 |

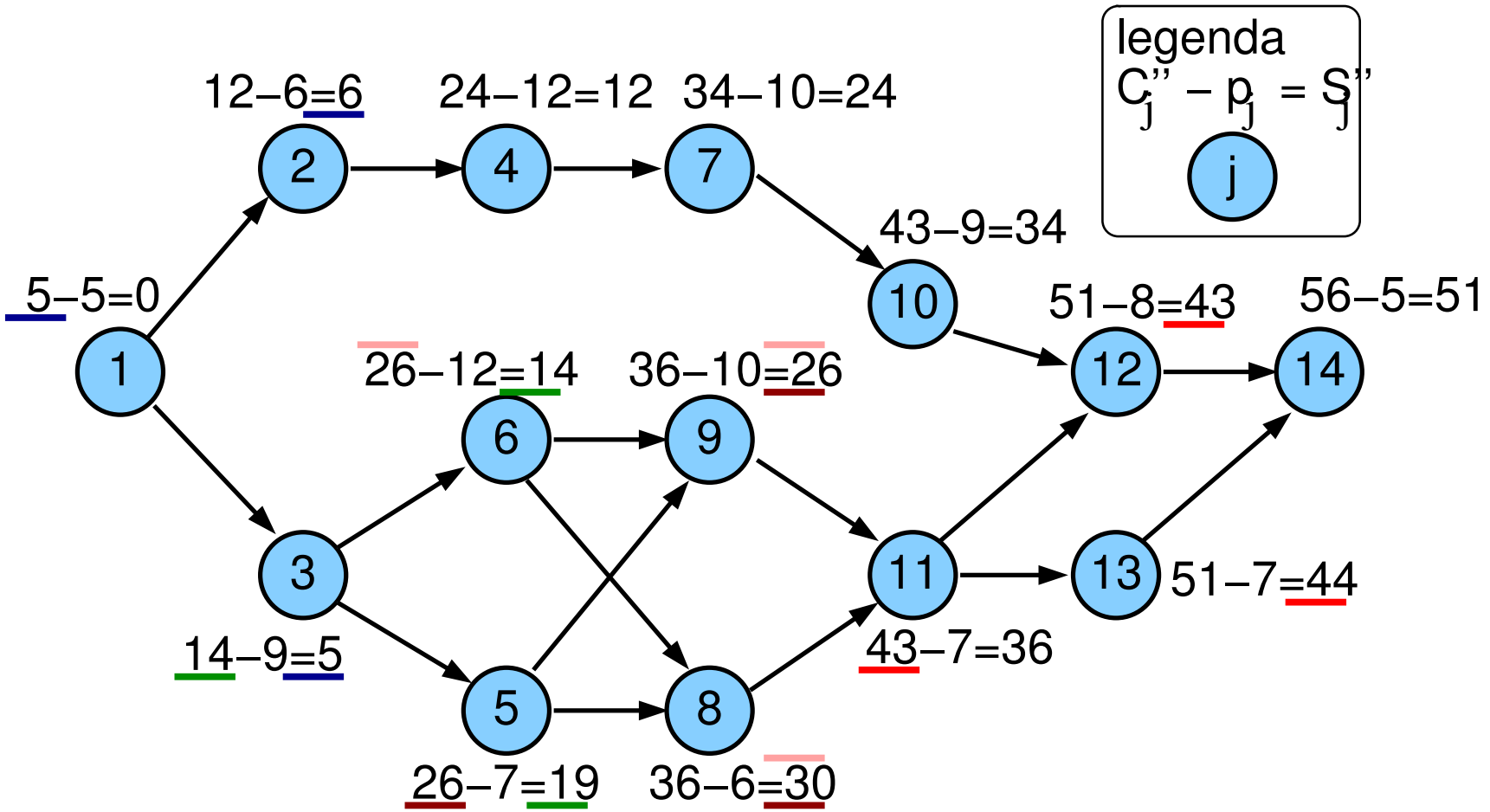


# Příklad: dopředná procedura



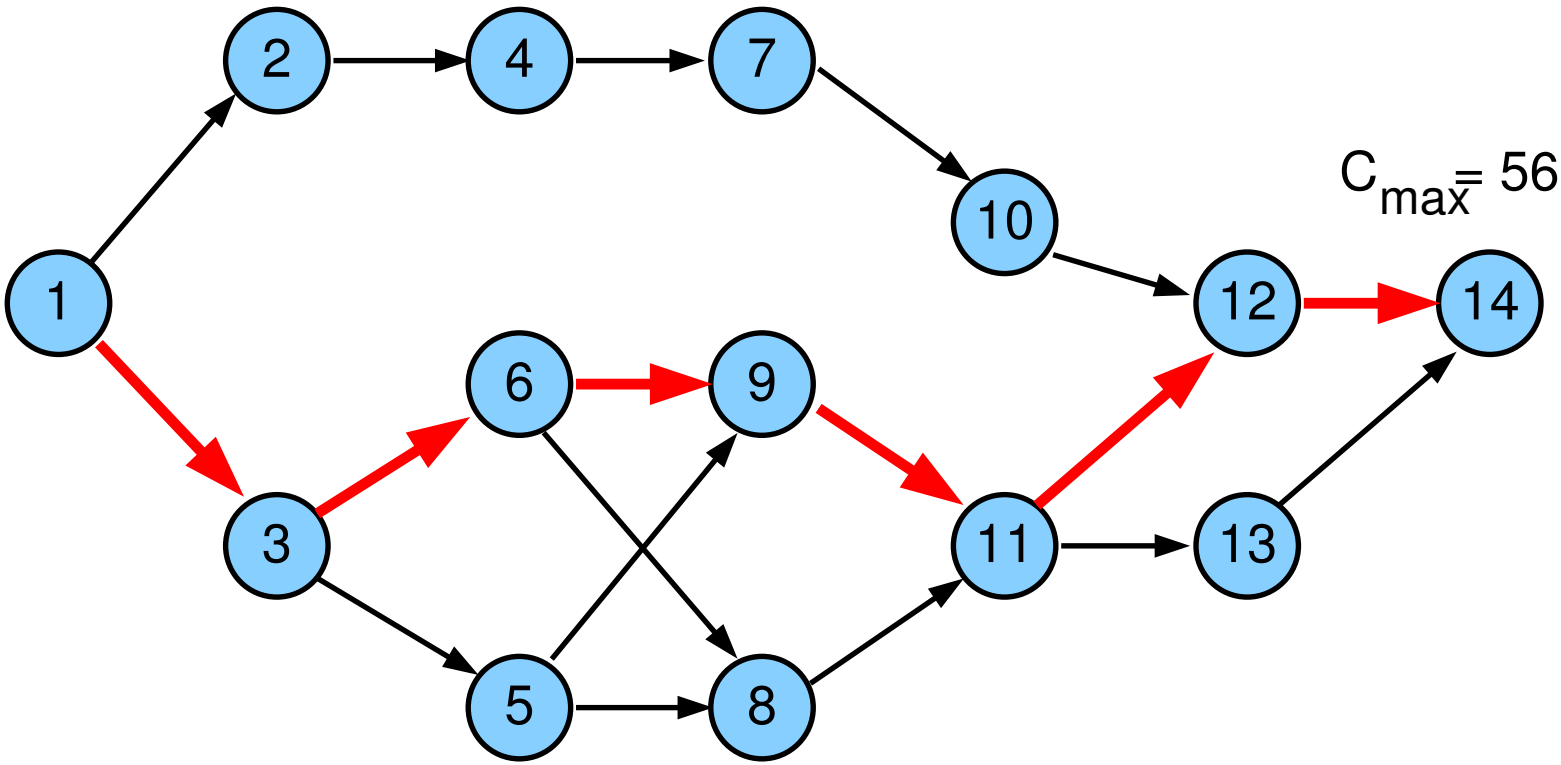

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 5 | 6 | 9 | 12 | 7 | 12 | 10 | 6 | 10 | 9 | 7 | 8 | 7 | 5 |

# Příklad: zpětná procedura



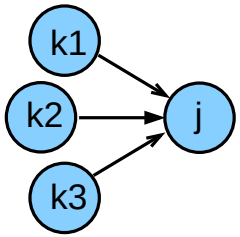

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 5 | 6 | 9 | 12 | 7 | 12 | 10 | 6 | 10 | 9 | 7 | 8 | 7 | 5 |

# Kritická cesta



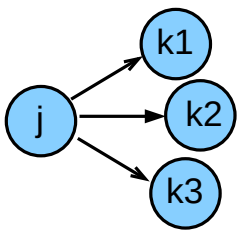
# Algoritmus pro nalezení kritické cesty

1. Dopředná procedura
   1. $t = 0$
   2. pro všechny úlohy $j$ bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
   3. vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy $j$:




$$S'_j = \max_{\forall k \in Prec_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

   4. optimální *makespan* je $C_{max} = \max(C'_1, \ldots, C'_n)$
2. Zpětná procedura
   - $t = C_{max}$
   - pro všechny úlohy $j$ bez následníka: $C''_j = C_{max}, S''_j = C_{max} - p_j$
   - vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy $j$:

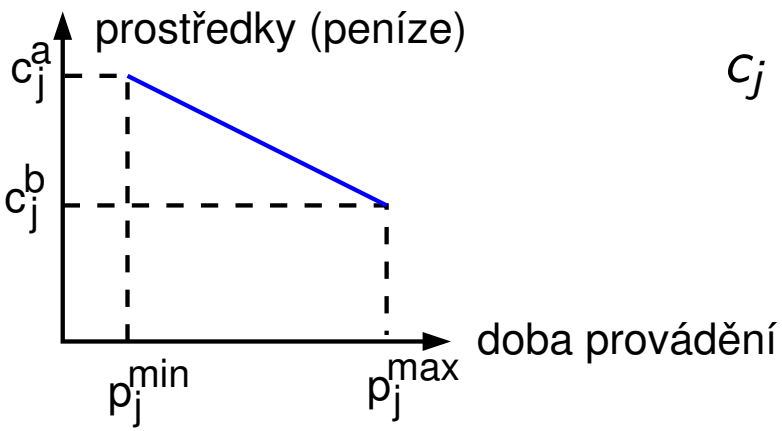



$$C''_j = \min_{\forall k: j \in Prec_k} S''_k, \quad S''_j = C''_j - p_j$$

   - ověř, že $0 = \min(S''_1, \ldots, S''_n)$

# Kompromis mezi časem a cenou

- Lze uvažovat variabilní dobu trvání úloh
  - za předpokladu vyšší ceny lze zkrátit dobu provádění
- Lineární cena
- Doba trvání $p_j^{min} \leq p_j \leq p_j^{max}$
- Marginální cena: cena za zkrácení doby trvání úlohy o 1 časovou jednotku




$$c_j = \frac{c_j^a - c_j^b}{p_j^{max} - p_j^{min}}$$

  - př. $p_j^{min} = 10,\ p_j^{max} = 15,\ c_j^b = 10,\ c_j^a = 20, \quad c_j = 2$

$\Rightarrow$ cena provádění úlohy $j$ po dobu $p_j$: $c_j^b + c_j(p_j^{max} - p_j)$

# Cena za provádění projektu

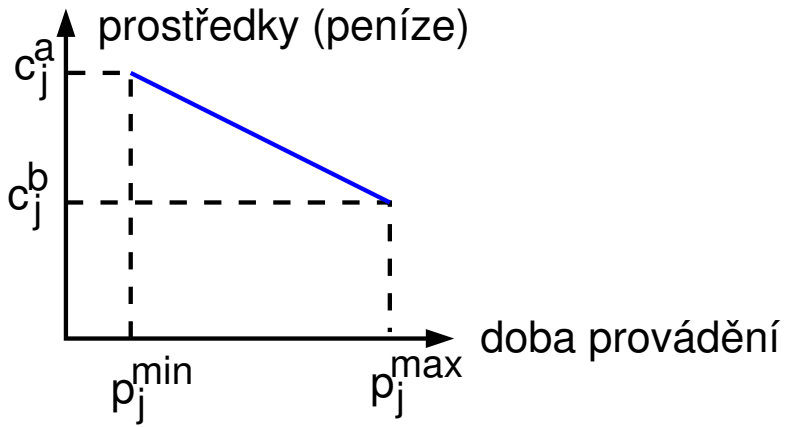
- Fixní režijní náklady $c_0$ — celkem: $C_{max} c_0$

  na časovou jednotku doby provádění projektu
- Cena $F(p_j)$ za provádění projektu
  - při době provádění úloh $p_j$

  určena jako součet
  - ceny za provádění všech úloh
  - fixních režijních nákladů

$$F(p_j) = C_{max} c_0 + \sum_j \left( c_j^b + c_j (p_j^{max} - p_j) \right)$$

- Cíl: $\forall j$ nalézt $p_j$ a $S_j$ tak, aby byla $F(p_j)$ minimální



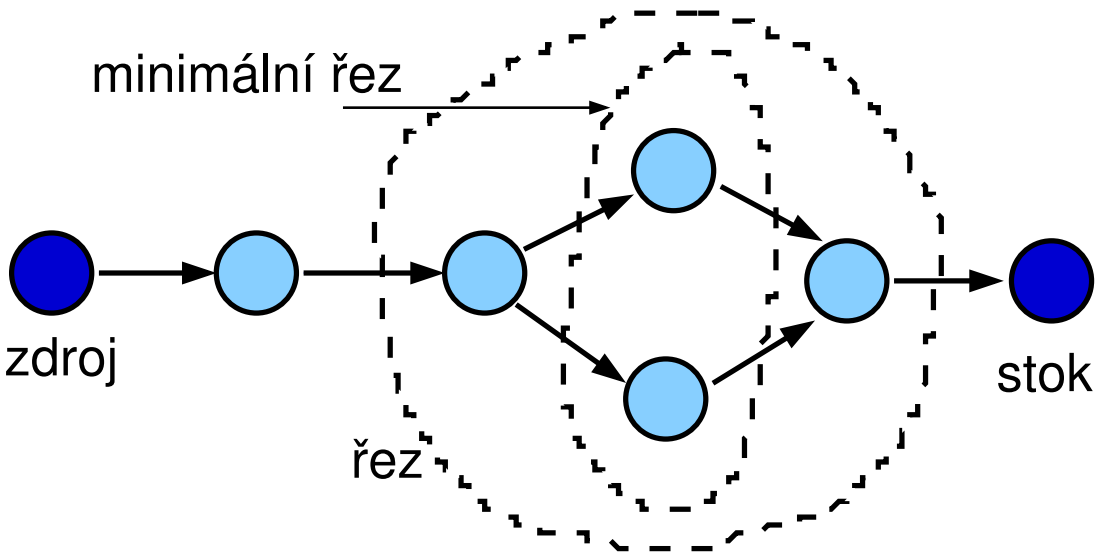
# Variabilní doba trvání: metody řešení

- Objektivní funkce: minimální cena projektu
- Kompromisní heuristika mezi časem a cenou
  - dobrá kvalita rozvrhu
  - použitené i pro nelineární cenu
- Formulace lineárního programování
  - optimální rozvrh
  - nelineární verze obtížně řešitelné

# Opakování: Řez, minimální řez

- Orientovaný graf $G = (V, E)$
- Počáteční uzel: zdroj $s \in V$
- Koncový uzel: stok $t \in V$
- Řez: ... také mluvíme o vrcholovém řezu
  množina uzlů $V'$, jejíž smazáním z grafu se rozpojí zdroj a stok
  - $E'$ množina hran incidentních s $V'$

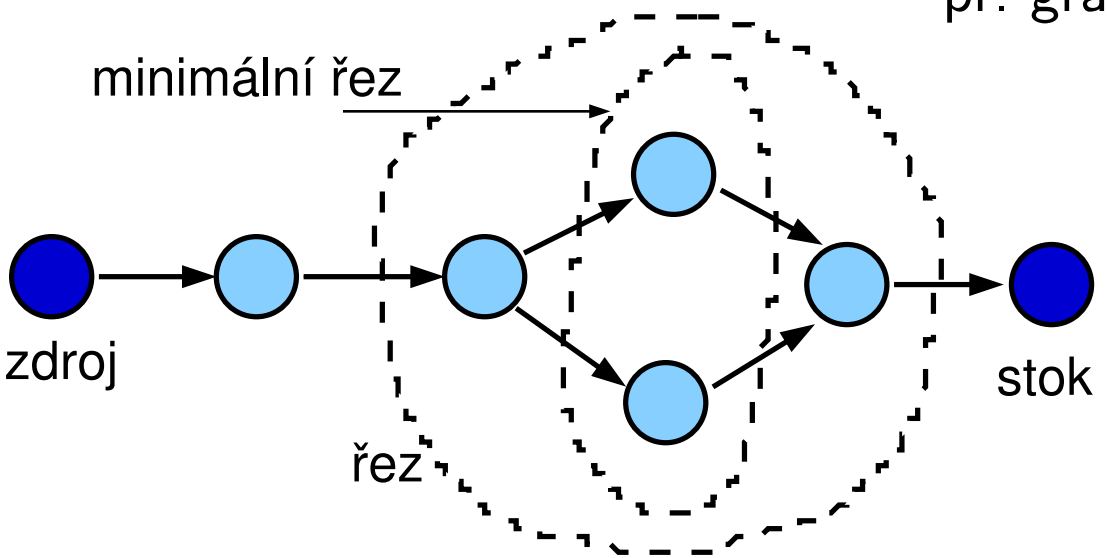
  tj. v G'=(V-V',E-E') neexistuje orientovaná cesta z $s$ to $t$
- Minimální řez: řez $U$ takový, že neexistuje řez $W \subset U$
  - tj. vrácení libovolného uzlu z $U$ do grafu znovu spojí zdroj a stok



# Řez, minimální řez II.

- Uvažujme orientovaný graf $G_0 = (V_0, E_0)$
- Do grafu přidáme zdroj:
  - nový vrchol $s$ a
  - hrany $S$ vedoucí z $s$ do všech vrcholů $G_0$ bez předchůdců
- Do grafu přidáme stok:
  - nový vrchol $t$ a
  - hrany $T$ vedoucí ze všech vrcholů $G_0$ bez následníků do $t$
- Nový graf $G = (V, E)$: $V = V_0 \cup \{s, t\}, \quad E = E_0 \cup S \cup T$
- Budeme hledat řezy a minimální řezy z $s$ do $t$ v $G$

př. graf má 4 minimální řezy

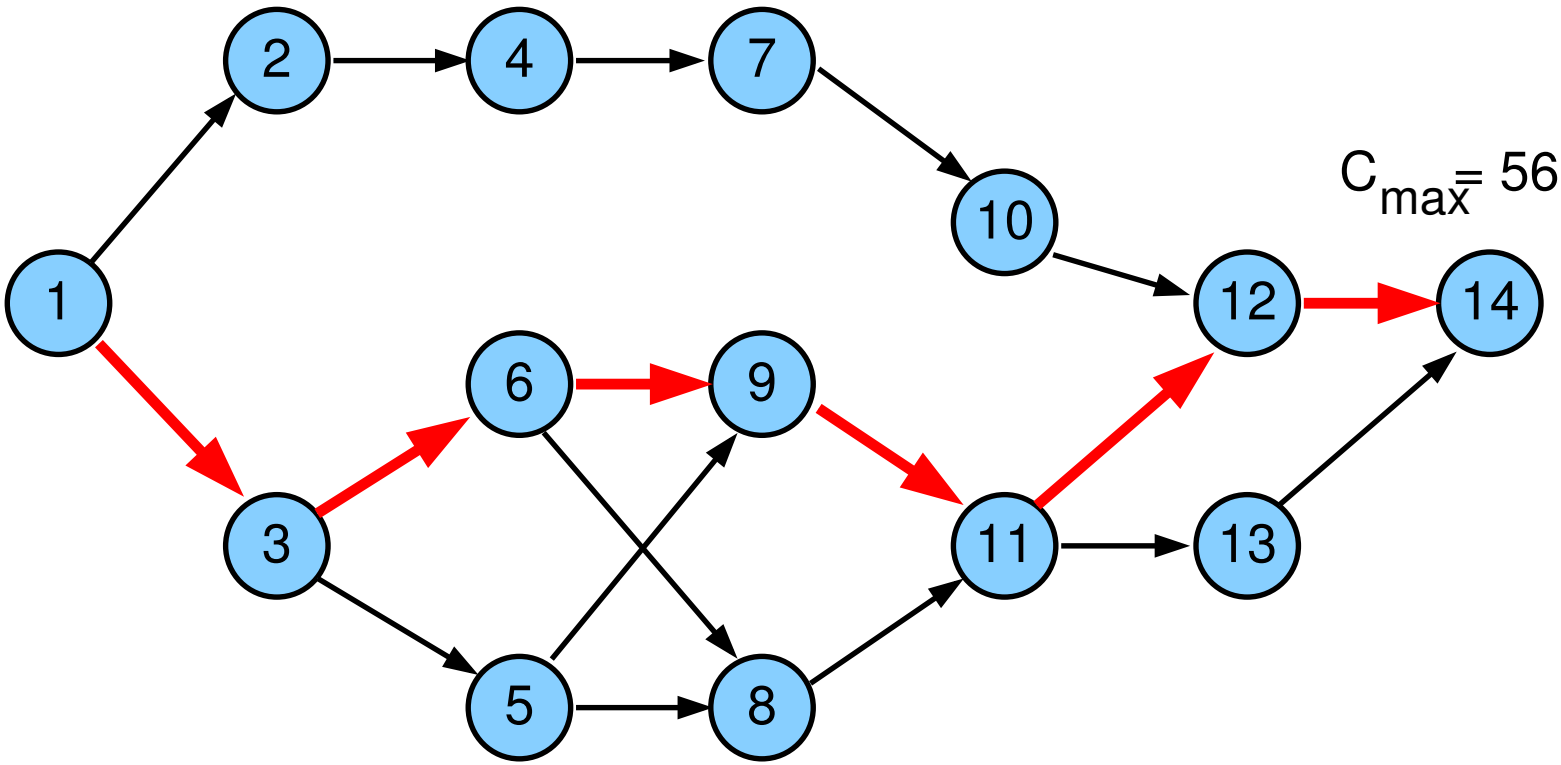


# Kompromisní heuristika: příklad

| **j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{p_j^{max}}$ | 5 | 6 | 9 | 12 | 7 | 12 | 10 | 6 | 10 | 9 | 7 | 8 | 7 | 5 |
| $\mathbf{p_j^{min}}$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 5 | 9 | 8 | 3 | 7 | 5 | 4 | 5 | 5 | 2 |
| $\mathbf{c_j^b}$ | 20 | 25 | 20 | 15 | 30 | 40 | 35 | 25 | 30 | 20 | 25 | 35 | 20 | 10 |
| $\mathbf{c_j}$ | 7 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 2 | 2 | 4 | 8 |

fixní režijní náklady na časovou jednotku $c_0$=6

# Příklad (pokračování): maximální doba provádění



# Kompromisní heuristika: příklad

$c_0$=6

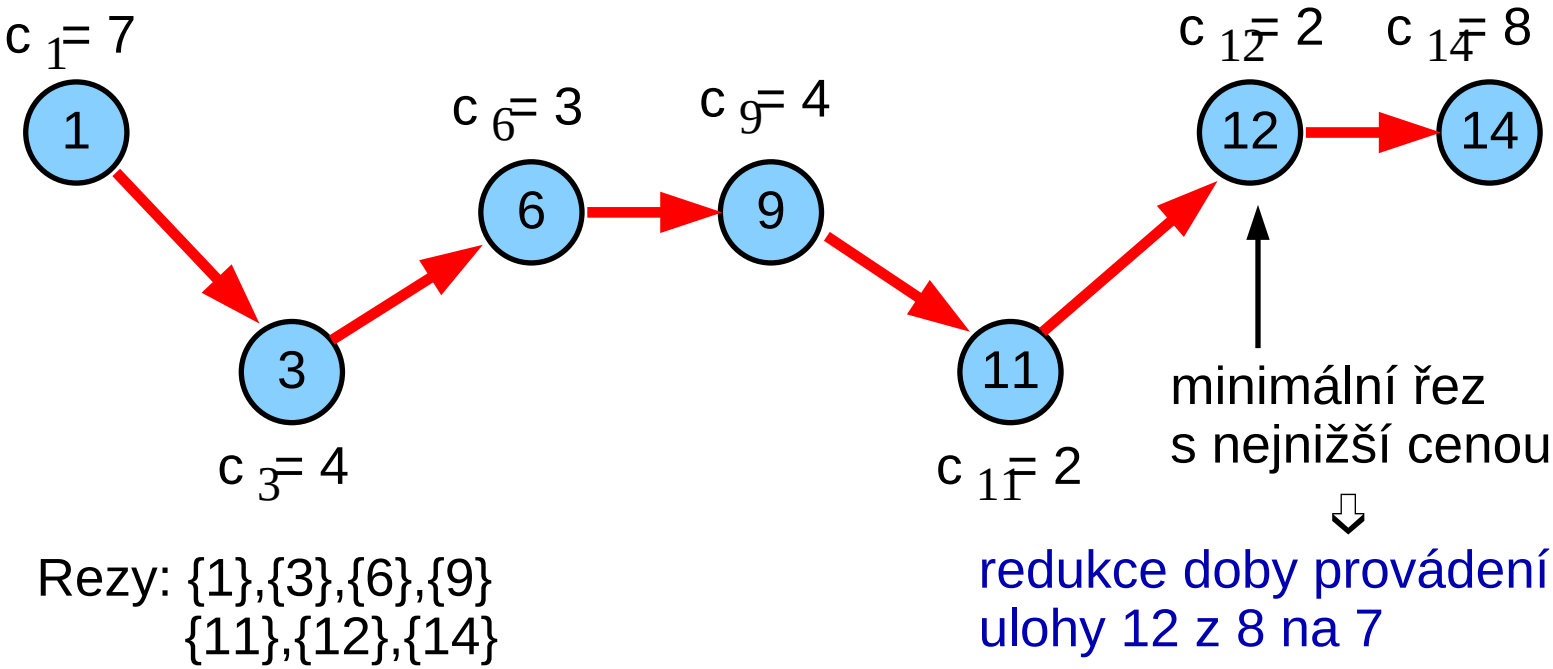
| **j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{p_j^{max}}$ | 5 | 6 | 9 | 12 | 7 | 12 | 10 | 6 | 10 | 9 | 7 | 8 | 7 | 5 |
| $\mathbf{p_j^{min}}$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 5 | 9 | 8 | 3 | 7 | 5 | 4 | 5 | 5 | 2 |
| $\mathbf{c_j^b}$ | 20 | 25 | 20 | 15 | 30 | 40 | 35 | 25 | 30 | 20 | 25 | 35 | 20 | 10 |
| $\mathbf{c_j}$ | 7 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 2 | 2 | 4 | 8 |

Náklady na provedení projektu při maximální době trvání úloh

$$
\begin{aligned}
F(p_j^{max}) &= C_{\max} c_0 + \sum_j \left( c_j^b + c_j (p_j^{max} - p_j^{max}) \right) = \\
&= C_{\max} c_0 + \sum_j c_j^b = \\
&= 56 \times 6 + 20 + 25 + 20 + 15 + 30 + 40 + 35 + 25 + \\
&\quad + 30 + 20 + 25 + 35 + 20 + 10 = \\
&= 336 + 350 = 686
\end{aligned}
$$

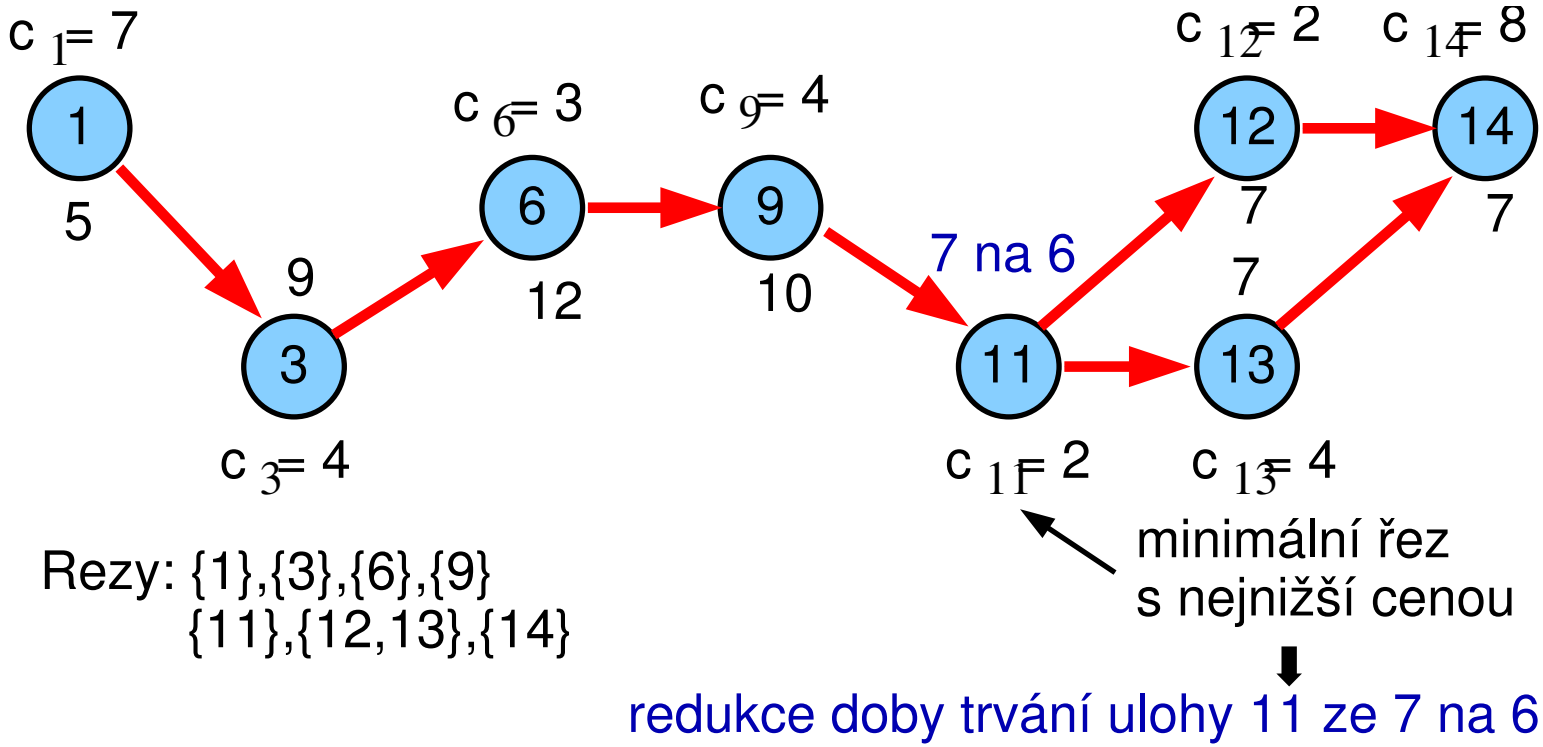
# Podgraf s kritickou cestou ($G_{CP}$)

- Kandidáti na redukci: uzel 11 a uzel 12, vybereme uzel 12



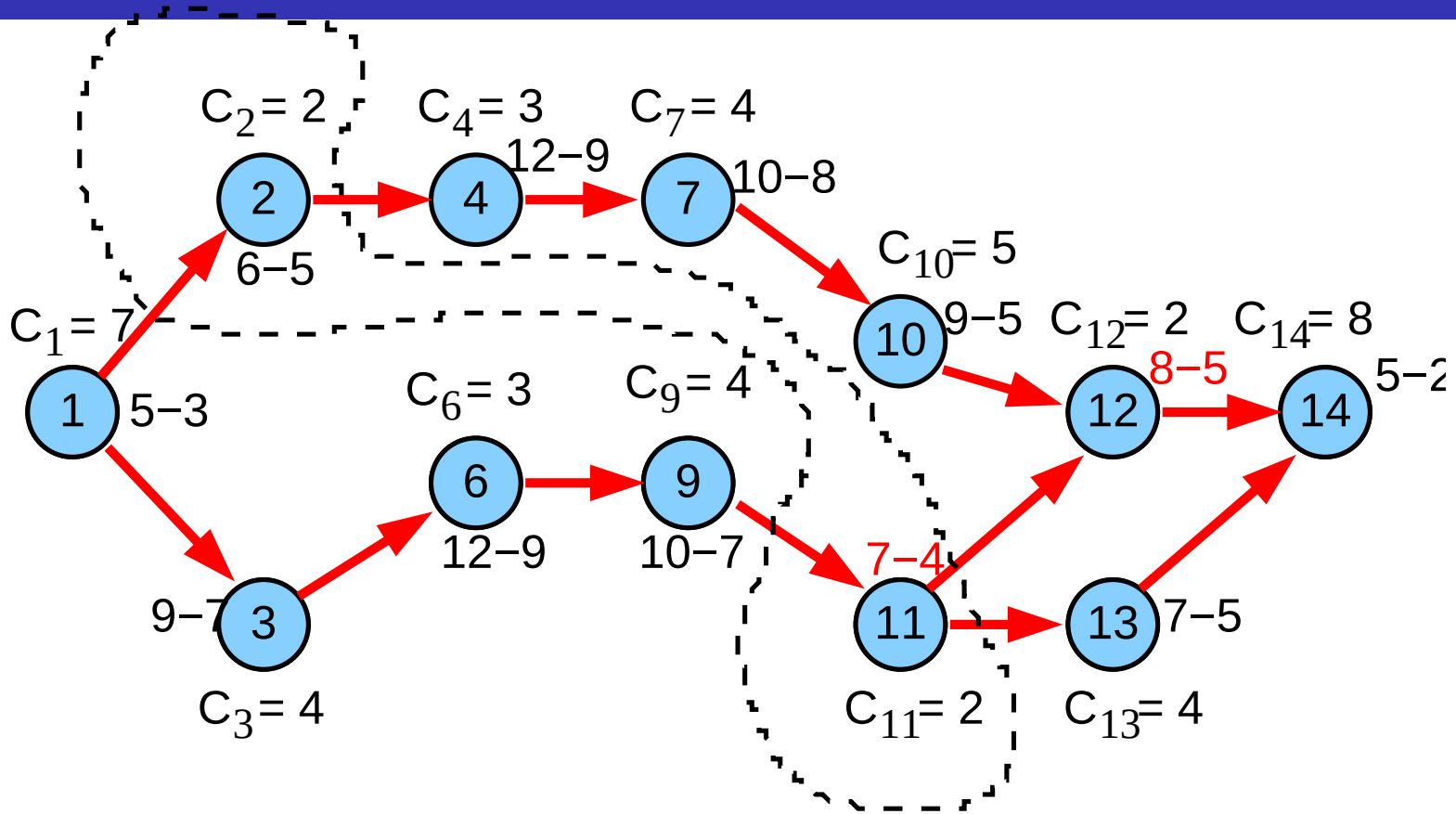

- Fixní režijní náklady se redukují z $56 \times 6$ na $55 \times 6 = 330$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{12} = 2$, tj. $350 + 2 = 352$
- Celková cena klesla z 686 na $330 + 352 = 682$

# Podgraf s kritickou cestou ($G_{CP}$)




- Fixní režijní náklady se redukují z $55 \times 6$ na $54 \times 6 = 324$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{11} = 2$, tj. $352 + 2 = 354$
- Celková cena klesla z 682 na $324 + 354 = 678$

# Podgraf s kritickou cestou ($G_{CP}$)




další redukce: pro uzel 2 na 5 a pro uzel 11 na 5, ...

- Fixní režijní náklady se redukují z $54 \times 6$ na $53 \times 6 = 318$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_2 + c_{11} = 2 + 2$, tj. $354 + 4 = 358$
- Celková cena klesla z 678 na $318 + 358 = 676$

# Algoritmus kompromisní heuristiky

1. Nastav doby provádění na jejich maximum: $p_j = p_j^{max}$
   - Urči všechny kritické cesty s těmito dobami provádění
   - Zkonstruuj graf $G_{CP}$ kritických cest
2. Urči všechny minimální řezy v $G_{CP}$
   - pozn. pokud zkrátíme dobu provádění všech úloh v minimálním řezu, podaří se nám i zkrátit dobu provádění projektu!
   - Najdi řezy, jejichž doba provádění je větší než jejich minimum: $p_j > p_j^{min} \quad \forall j \in G_{CP}$
   - Pokud takový řez neexistuje STOP, jinak běž na krok 3
3. Pro každý minimální řez: spočítej cenu redukující všechny doby provádění o 1 časovou jednotku
   - Vyber minimální řez s nejnižší cenou
     - pozn. abychom za snížení zaplatili co nejnižší cenu
   - Jestliže je cena řezu menší než fixní režijní náklady $c_0$ za časovou jednotku běž na krok 4, jinak STOP
4. Redukuj všechny doby provádění v minimálním řezu o 1 časovou jednotku
   - Urči novou množinu kritických cest
   - Reviduj graf $G_{CP}$ a běž na krok 2

# Lineární program

- Heuristika negarantuje nalezení optima
- Celková cena je lineární

$$c_0 C_{max} + \sum_{j=1}^{n} \left( c_j^b + c_j (p_j^{max} - p_j) \right)$$

všimněte si: stejná účelová funkce jako cena za provádění projektu

- Lineární program:

  $c_j^b$ a $c_j\, p_j^{max}$ se nemění

  minimalizace: $c_0 C_{max} - \sum_{j=1}^{n} c_j p_j$

  za předpokladu:

$$\begin{aligned} x_k - p_j - x_j &\geq 0 && \forall j \in Prec_k \\ p_j &\leq p_j^{max} && \forall j \\ p_j &\geq p_j^{min} && \forall j \\ x_j &\geq 0 && \forall j \\ C_{max} - x_j - p_j &\geq 0 && \forall j \end{aligned}$$

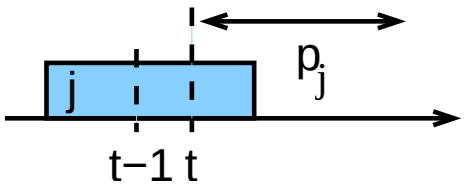
  kde $x_j$ je nejdřívější možný startovní čas úlohy $j$

# Přidání pracovní síly

- Pracovní síla = operátor = zdroj
- Problém popsán v literatuře jako
  problém plánování projektu s omezenými zdroji
  *resource-constrained project scheduling problem (RCPSP)*
  - $n$ úloh
  - $N$ zdrojů
  - $R_i$ kapacita zdroje $i$
  - $p_j$ doba provádění úlohy $j$
  - $R_{ij}$ požadavek úlohy $j$ na zdroj $i$
  - $Prec_j$ (přímí) předchůdci úlohy $j$

# Formulace celočíselného programování

- Pomocná úloha $n+1$ jako stok, $p_{n+1} = 0$
- $x_{jt} = 1$ úloha $j$ je dokončena v čase $t$
  $x_{jt} = 0$ jinak
- Kapacita zdroje $i$, který potřebuje úloha $j$
  v intervalu $[t-1, t]$: $R_{ij} \sum_{u=t}^{t+p_j-1} x_{ju}$




$\sum_{u=t}^{t+p_j-1} x_{ju}$ ... počítá, zda úloha $j$ běží v čase $[t-1, t]$

př. úloha s $S_j = 2, p_j = 2$ a $t = 2, 3, 4, 5$ ($x_{j4} = 1$, pro $t = 3, 4$ úloha započítána)

- $H$ jako horní hranice *makespan*: $H = \sum_{j=1}^{n} p_j$
- Koncový čas úlohy $j$: $C_j = \sum_{t=1}^{H} t\, x_{jt}$
- *Makespan*: $C_{max} = \sum_{t=1}^{H} t\, x_{n+1,t}$ koncový čas stoku

# Celočíselný program

Minimalizace $\sum_{t=1}^{H} t\, x_{n+1,t}$ minimalizace *makespan*

za předpokladu

jestliže $j$ je předchůdce $k$, pak $C_j \leq S_k$, tj. $C_j \leq C_k - p_k$, tj. $C_j + p_k - C_k \leq 0$

$$\sum_{t=1}^{H} t\, x_{jt} + p_k - \sum_{t=1}^{H} t\, x_{kt} \leq 0 \qquad \forall j \in Prec_k$$

pro každý čas $t$: požadavek na zdroj $i$ nepřeroste kapacitu $i$

$$\sum_{j=1}^{n} \left( R_{ij} \sum_{u=t}^{t+p_j-1} x_{ju} \right) \leq R_i \qquad \forall i\, \forall t$$

každá úloha $j$ skončí právě jednou

$$\sum_{t=1}^{H} x_{jt} = 1 \qquad \forall j$$

# Diskuse

- Řešení celočíselného programu obtížné
- Při velkém počtu úloh a dlouhém časovém horizontu
  - použití heuristik
- Lze použít programování s omezujícími podmínkami
  - kumulativní zdroje
  - precedenční podmínky
- Probírané speciální případy problému
  - *job shop + makespan*
  - *timetabling*

# Plánování projektu: shrnutí

- Základní problém s neomezenými zdroji
  - metoda kritické cesty
- Neomezené zdroje + variabilní doba trvání (lineární)
  - kompromisní heuristika mezi časem a cenou
  - lineární programování
- Problém plánování projektu s omezenými zdroji
  - celočíselné programování
  - heuristiky
  - programování s omezujícími podmínkami