Algebra II – jaro 2016 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, *, \mu)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem $a*b = a+b-1$ pro $a, b \in \mathbb{N}$ a μ je unární operace definovaná předpisem
$$\mu(a) = \begin{cases} 4 & \text{pro } a \text{ sudé, } a \neq 4, \\ 5 & \text{pro } a = 4, \\ a+2 & \text{pro } a \text{ liché.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \leq)$, kde
$$L = \{ (P, Q) \mid P, Q \subseteq \mathbb{N},\ |P| = |Q| \}$$
a $(P, Q) \leq (R, S)$ platí právě tehdy, když $P \subseteq R$ a $Q \subseteq S$, je svaz.

3. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \leq)$, kde L je množina všech spojitých funkcí $\varphi\colon \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ a $\varphi \leq \psi$ platí právě tehdy, když pro všechna $0 \leq r \leq 1$ je splněno $\varphi(r) \leq \psi(r)$, je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$, kde prvky L jsou právě otevřené intervaly (tedy množiny (r, s) pro $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$), prázdná množina a celá množina $\mathbb{R}$, je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpis $\varphi \sim \psi \iff \ker\varphi = \ker\psi$ definuje kongruenci $\sim$ algebry $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathrm{id}, \kappa, \circ)$, kde id je konstanta, κ je unární operace definovaná pro $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R}$ předpisem $\kappa(\varphi)(r) = \mathrm{e}^{\varphi(r)}$ a $\circ$ je operace skládání zobrazení.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z unárních operačních symbolů f a g a binárního operačního symbolu h. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $\mathcal{P}(\{0,1\}^*)$ a s operacemi definovanými pro libovolné jazyky $L, M \subseteq \{0,1\}^*$ předpisy $f^{\mathcal{A}}(L) = \{ vu \mid u, v \in \{0,1\}^*,\ uv \in L \}$, $g^{\mathcal{A}}(L) = \{ uu \mid u \in L \}$ a $h^{\mathcal{A}}(L, M) = L \cdot M$.
a) $f(g(x)) = g(f(x))$,
b) $f(h(x, y)) = h(f(x), f(y))$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech monounárních algeber, které buď mají nejvýše jeden prvek, nebo jsou izomorfní nějaké své vlastní podalgebře.