Algebra II – jaro 2018 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Nechť

$$A = \{\, M \subseteq \mathbb{N} \mid M \text{ je konečná, nebo } \mathbb{N} \setminus M \text{ je konečná} \,\}.$$

Popište svaz podalgeber algebry $(A, \triangle, m, n)$, kde $\triangle$ značí symetrický rozdíl a m a n jsou unární operace definované předpisy

$$m(M) = \begin{cases} \{\min(M)\}, & \text{pokud } M \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{pokud } M = \emptyset, \end{cases}$$

$$n(M) = \begin{cases} \{\min(M)+1\}, & \text{pokud } M \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{pokud } M = \emptyset. \end{cases}$$

2. (5 bodů) Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou všechny podmnožiny uspořádané množiny $(\mathbb{N}, |)$, které mají konečně mnoho maximálních prvků. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$ je svaz.

3. (5 bodů) Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou $\emptyset$, $\mathbb{R}^2$ a všechny rovnostranné trojúhelníky v rovině $\mathbb{R}^2$, jejichž jedna hrana je horizontální a protilehlý vrchol je nahoře. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$ je úplný svaz.

4. (5 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$ a všechny konečné posloupnosti přirozených čísel $(a_i)_{i=1}^n$, kde $n, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, na nichž je uspořádání dáno předpisem

$$(a_i)_{i=1}^n \leq (b_i)_{i=1}^m \quad \iff \quad n \leq m \ \&\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon a_i \leq b_i.$$

Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je algebraický svaz.

5. (10 bodů) Na množině $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Q})$ všech konečných množin racionálních čísel uvažujeme relaci $\sim$, kde $(M, N) \in \sim$ právě tehdy, když čísla v M a v N mají stejný součet i aritmetický průměr. Rozhodněte, zda relace $\sim$ je kongruencí algebry $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Q}), +, \oplus)$, kde $+$ a $\oplus$ jsou binární operace definované předpisy $M + N = \{\, m + n \mid m \in M,\ n \in N \,\}$ a $M \oplus N = \{\, \mu + n \mid n \in N \,\}$, kde μ je aritmetický průměr čísel v M.

6. (10 bodů) Uvažujme typ algeber sestávající ze dvou binárních operačních symbolů $\bullet$ a $\diamond$. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$, jejíž nosnou množinou je množina všech čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{R}$, operací $\bullet^{\mathcal{A}}$ je sčítání a operace $\diamond^{\mathcal{A}}$ je definována pro libovolné matice M a N předpisem

$$M \diamond^{\mathcal{A}} N = M \cdot N - N \cdot M.$$

a) $\big(((x \diamond y) \diamond z) \bullet ((z \diamond x) \diamond y)\big) \bullet ((y \diamond z) \diamond x) = (x \diamond y) \diamond (y \diamond x)$,
b) $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$.

7. (15 bodů) Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech monounárních algeber $\mathcal{A}$ takových, že pro každou kongruenci $\sim$ algebry $\mathcal{A}$ je algebra $\mathcal{A}/\!\sim$ izomorfní $\mathcal{A}$ nebo triviální.