Množiny

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

V této kapitole připomeneme pojem množiny a pojmy s ním spjaté (podmnožina, operace nad množinami, vlastnosti množin). Speciálně zavedeme pojem *množiny všech podmnožin*.

Obsah přednášky

- Úvod
  - Množina, prvek, podmnožina, vztah inkluze.
  - Sjednocení, průnik, rozdíl, disjunktní množiny.

Obsah přednášky

- Úvod
  - Množina, prvek, podmnožina, vztah inkluze.
  - Sjednocení, průnik, rozdíl, disjunktní množiny.
- Základní tvrzení o množinách
  - Komutativita, asociativita, idempotentnost, distributivita, de Morganova pravidla
- Množina všech podmnožin

Množina, prvek množiny

Množinou rozumíme každý soubor určitých objektů shrnutých v jeden celek. Zmíněné objekty pak nazýváme prvky dané množiny. Pojem „množina” je tedy synonymem pojmů typu „soubor”, „souhrn”, apod.

Množina, prvek množiny

Množinou rozumíme každý soubor určitých objektů shrnutých v jeden celek. Zmíněné objekty pak nazýváme prvky dané množiny. Pojem „množina” je tedy synonymem pojmů typu „soubor”, „souhrn”, apod.

Je-li objekt x prvkem množiny A, píšeme $x \in A$. Není-li objekt x prvkem množiny A, píšeme $x \notin A$.

Množina je plně určena svými prvky.

Rovnost množin

Pro množiny A, B máme $A = B$ právě když pro každý objekt x platí, že x je prvkem A tehdy a jen tehdy, když x je prvkem B.

Rovnost množin

Pro množiny A, B máme $A = B$ právě když pro každý objekt x platí, že x je prvkem A tehdy a jen tehdy, když x je prvkem B.

Zapsáno formulí, máme

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B).$$

Podmnožina

Řekneme, že množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B.

Píšeme $A \subseteq B$ a mluvíme o **inkluzi** množin.

Podmnožina

Řekneme, že množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B.

Píšeme $A \subseteq B$ a mluvíme o **inkluzi** množin.

To znamená, že $A \subseteq B$ právě když pro každý objekt x platí, že je-li x prvkem A, pak x je také prvkem B.

Podmnožina

Řekneme, že množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B.

Píšeme $A \subseteq B$ a mluvíme o **inkluzi** množin.

To znamená, že $A \subseteq B$ právě když pro každý objekt x platí, že je-li x prvkem A, pak x je také prvkem B.

Zapsáno formulí, máme tedy

$$A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \implies x \in B).$$

Inkluze, rovnost a tranzitivita

Máme pak

$$A = B \iff (A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A).$$

Inkluze, rovnost a tranzitivita

Máme pak

$$A = B \iff (A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A).$$

Pro libovolné množiny A, B, C platí

$$(A \subseteq B \ \& \ B \subseteq C) \implies A \subseteq C.$$

Inkluze, rovnost a tranzitivita

Máme pak

$$A = B \iff (A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A).$$

Pro libovolné množiny A, B, C platí

$$(A \subseteq B \;\&\; B \subseteq C) \implies A \subseteq C.$$

Místo $A \subseteq B$ se někdy píše také $B \supseteq A$.
Platí-li současně $A \subseteq B$ a $A \neq B$, bývá to krátce zapisováno ve tvaru $A \subset B$.

Konečná a nekonečná podmnožina

Význačnou množinou je **prázdná množina**, tedy množina, která neobsahuje žádný prvek.
Značíme ji $\emptyset$.

Pro libovolnou množinu A máme

$$A \subseteq A \qquad \text{a} \qquad \emptyset \subseteq A.$$

Konečná a nekonečná podmnožina

Význačnou množinou je **prázdná množina**, tedy množina, která neobsahuje žádný prvek. Značíme ji $\emptyset$.

Pro libovolnou množinu A máme

$$A \subseteq A \qquad \text{a} \qquad \emptyset \subseteq A.$$

Množina A se nazývá **konečná**, obsahuje-li pouze konečně mnoho různých prvků.

Konečná a nekonečná podmnožina

Význačnou množinou je **prázdná množina**, tedy množina, která neobsahuje žádný prvek. Značíme ji $\emptyset$.

Pro libovolnou množinu A máme

$$A \subseteq A \qquad \text{a} \qquad \emptyset \subseteq A.$$

Množina A se nazývá **konečná**, obsahuje-li pouze konečně mnoho různých prvků.

V opačném případě je A **nekonečná** množina.

Sjednocení a průnik množin

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **sjednocení** $A \cup B$ jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou prvky buď množiny A nebo množiny B, tedy těmi prvky, které jsou prvky alespoň jedné z množin A, B.

Sjednocení a průnik množin

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **sjednocení** $A \cup B$ jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou prvky buď množiny A nebo množiny B, tedy těmi prvky, které jsou prvky alespoň jedné z množin A, B.Klademe

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Sjednocení a průnik množin

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **sjednocení** $A \cup B$ jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou prvky buď množiny A nebo množiny B, tedy těmi prvky, které jsou prvky alespoň jedné z množin A, B.Klademe

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Definujeme **průnik** $A \cap B$ těchto množin jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou současně prvky množiny A i množiny B.

Sjednocení a průnik množin

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **sjednocení** $A \cup B$ jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou prvky buď množiny A nebo množiny B, tedy těmi prvky, které jsou prvky alespoň jedné z množin A, B.Klademe

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}.$$

Definujeme **průnik** $A \cap B$ těchto množin jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou současně prvky množiny A i množiny B. Tedy

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \,\&\, x \in B\}.$$

Disjunktnost a rozdíl množin

Říkáme, že množiny A, B jsou **disjunktní**, je-li $A \cap B = \emptyset$.

Disjunktnost a rozdíl množin

Říkáme, že množiny A, B jsou **disjunktní**, je-li $A \cap B = \emptyset$.

Konečně definujeme **rozdíl** $A - B$ množin A, B jako množinu těch prvků množiny A, které nejsou prvky množiny B.

Disjunktnost a rozdíl množin

Říkáme, že množiny A, B jsou **disjunktní**, je-li $A \cap B = \emptyset$.

Konečně definujeme **rozdíl** $A - B$ množin A, B jako množinu těch prvků množiny A, které nejsou prvky množiny B.
To znamená, že klademe

$$A - B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \notin B\}.$$

Základní tvrzení o množinách I

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(komutativita)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(asociativita)

Základní tvrzení o množinách II

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

(idempotence)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(distributivita)

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

(de Morganova pravidla)

Základní tvrzení o množinách III

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí

$$A - B = A - (A \cap B)$$
$$A - (B \cup C) = (A - B) - C$$
$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

Sjednocení souboru množin

Obecněji buď I libovolná množina. Dále nechť pro každé $i \in I$ je A_i nějaká množina. Říkáme, že I je indexová množina souboru množin A_i, $i \in I$.

Sjednocení souboru množin

Obecněji buď I libovolná množina. Dále nechť pro každé $i \in I$ je A_i nějaká množina. Říkáme, že I je indexová množina souboru množin A_i, $i \in I$. Pak **sjednocení** tohoto souboru množin definujeme jako množinu

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)(x \in A_i)\},$$

tedy jako množinu všech těch prvků, které jsou prvky alespoň jedné z množin A_i uvedeného souboru.

Průniky souboru množin I

Je-li $I \neq \emptyset$, pak definujeme také **průnik** tohoto souboru množin jakožto množinu

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)(x \in A_i)\},$$

tedy jako množinu všech těch prvků, které jsou prvky každé z množin A_i uvedeného souboru. Pro $I = \emptyset$ není tento průnik definován.

Průniky souboru množin I

Je-li $I \neq \emptyset$, pak definujeme také **průnik** tohoto souboru množin jakožto množinu

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)(x \in A_i)\},$$

tedy jako množinu všech těch prvků, které jsou prvky každé z množin A_i uvedeného souboru.
Pro $I = \emptyset$ není tento průnik definován.
V této souvislosti dále říkáme, že množiny zmíněného souboru jsou **vzájemně disjunktní**, jestliže pro každá $i, j \in I$, $i \neq j$, platí $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Základní tvrzení o množinách IV

Tvrzení. Pro libovolnou množinu A, pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor množin B_i, kde $i \in I$, platí

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \qquad \text{(distributivita)}$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

$$A - \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A - B_i)$$

$$A - \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A - B_i)$$

$\left(\begin{array}{c} \text{de Morganova} \\ \text{pravidla} \end{array} \right)$

Doplněk množiny

Pro libovolnou množinu $A \subseteq M$ množinu $M - A$ značíme krátce A' a nazýváme ji **doplněk** množiny A v množině M.

Pro libovolnou množinu $A \subseteq M$ platí

$$A \cup A' = M, \quad A \cap A' = \emptyset \quad \text{a} \quad A'' = A.$$

Průniky souboru množin II

Je-li I indexová množina a jsou-li $A_i \subseteq M$ jakékoliv podmnožiny pro všechna $i \in I$, pak je možno modifikovat definici průniku souboru množin A_i pro $i \in I$ předpisem

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in M \mid (\forall i \in I)(x \in A_i)\},$$

tedy jako množinu všech těch prvků z M, které jsou prvky každé z množin A_i uvedeného souboru.

Průniky souboru množin II

Je-li I indexová množina a jsou-li $A_i \subseteq M$ jakékoliv podmnožiny pro všechna $i \in I$, pak je možno modifikovat definici průniku souboru množin A_i pro $i \in I$ předpisem

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in M \mid (\forall i \in I)(x \in A_i)\},$$

tedy jako množinu všech těch prvků z M, které jsou prvky každé z množin A_i uvedeného souboru.

Průnik je definován i tehdy, je-li $I = \emptyset$, a v tom případě je roven celé množině M. Pro $I \neq \emptyset$ je tato definice shodná s definicí předchozí.

Aplikace de Morganových pravidel

Dále z de Morganových pravidel pro libovolný soubor podmnožin $A_i \subseteq M$, kde $i \in I$, plyne

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$$

a tyto rovnosti platí i v případě, že $I = \emptyset$.

Množina všech podmnožin

K libovolné množině A vytvořme množinu

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\},$$

tedy množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny ty množiny, které jsou podmnožinami množiny A.

Množina všech podmnožin

K libovolné množině A vytvořme množinu

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\},$$

tedy množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny ty množiny, které jsou podmnožinami množiny A.

Tuto množinu nazýváme **množinou všech podmnožin** množiny A, nebo též **potenční množinou** množiny A.

Iterace konstrukce potenční množiny

Konstrukci potenční množiny lze iterovat.

Všimněme si například, že

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

Iterace konstrukce potenční množiny

Konstrukci potenční množiny lze iterovat.

Všimněme si například, že

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

Iterace konstrukce potenční množiny

Konstrukci potenční množiny lze iterovat.

Všimněme si například, že

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\},\\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \quad \text{atd.}
\end{aligned}$$

Konstrukce přirozených čísel I

Sestrojíme množinu

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

všech nezáporných celých čísel. Prvky této množiny mají být zase množiny.

Konstrukce přirozených čísel I

Sestrojíme množinu

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

všech nezáporných celých čísel. Prvky této množiny mají být zase množiny.

Definujeme tedy čísla

$$0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

indukcí jako množiny následovně.

Konstrukce přirozených čísel II

Klademe

$$0 = \emptyset$$

Konstrukce přirozených čísel II

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\}$$

Konstrukce přirozených čísel II

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

Konstrukce přirozených čísel II

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$
$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},\ \dots\ ,$$

Konstrukce přirozených čísel II

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$
$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},\ \dots\ ,$$

tedy pro každé $n > 1$ klademe

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Konstrukce přirozených čísel II

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$
$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots ,$$

tedy pro každé $n > 1$ klademe

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Pro každá $m, n \in \omega$ máme $m < n$ právě tehdy, když $m \in n$.