Princip inkluze a exkluze

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

Opakování principu inkluze a exkluze.

Obsah přednášky

- Princip inkluze a exkluze.
- Příklad na počet surjektivních zobrazení.
- Příklad na počet permutací bez pevného bodu.

Princip inkluze a exkluze I

Je dána konečná množina Q objektů, u nichž rozlišujeme konečný počet jistých vlastností, indexovaných prvky nějaké konečné množiny I. Každý z objektů množiny Q může mít některé ze zmíněných vlastností a jiné mít nemusí.

Princip inkluze a exkluze I

Je dána konečná množina Q objektů, u nichž rozlišujeme konečný počet jistých vlastností, indexovaných prvky nějaké konečné množiny I. Každý z objektů množiny Q může mít některé ze zmíněných vlastností a jiné mít nemusí.

Problém, který zkoumáme, spočívá v tom, jak určit, kolik je objektů nemajících žádnou z uvedených vlastností.

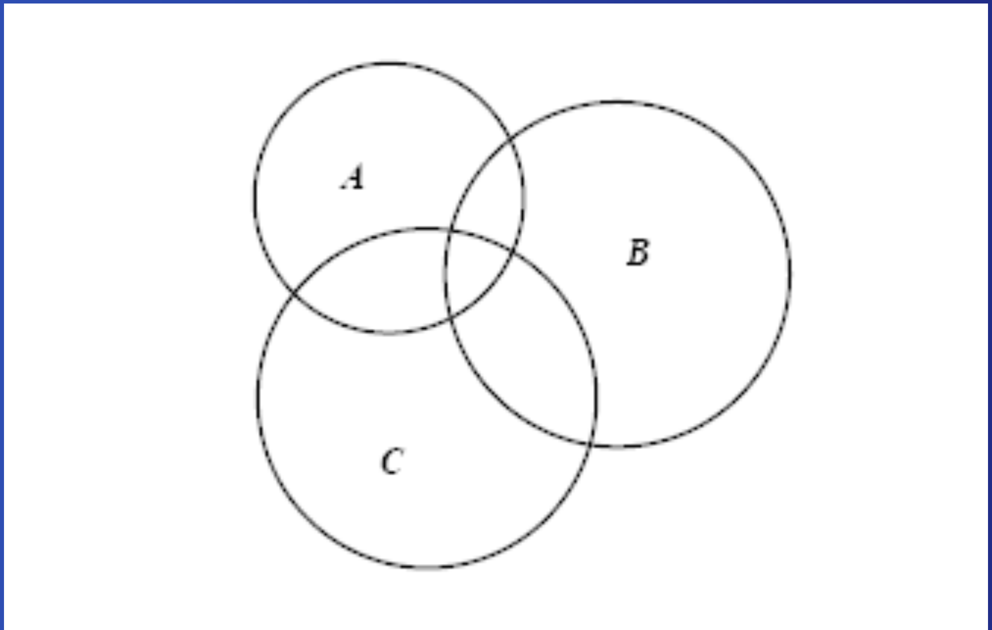
Princip inkluze a exkluze I

Je dána konečná množina Q objektů, u nichž rozlišujeme konečný počet jistých vlastností, indexovaných prvky nějaké konečné množiny I. Každý z objektů množiny Q může mít některé ze zmíněných vlastností a jiné mít nemusí.

Problém, který zkoumáme, spočívá v tom, jak určit, kolik je objektů nemajících žádnou z uvedených vlastností.

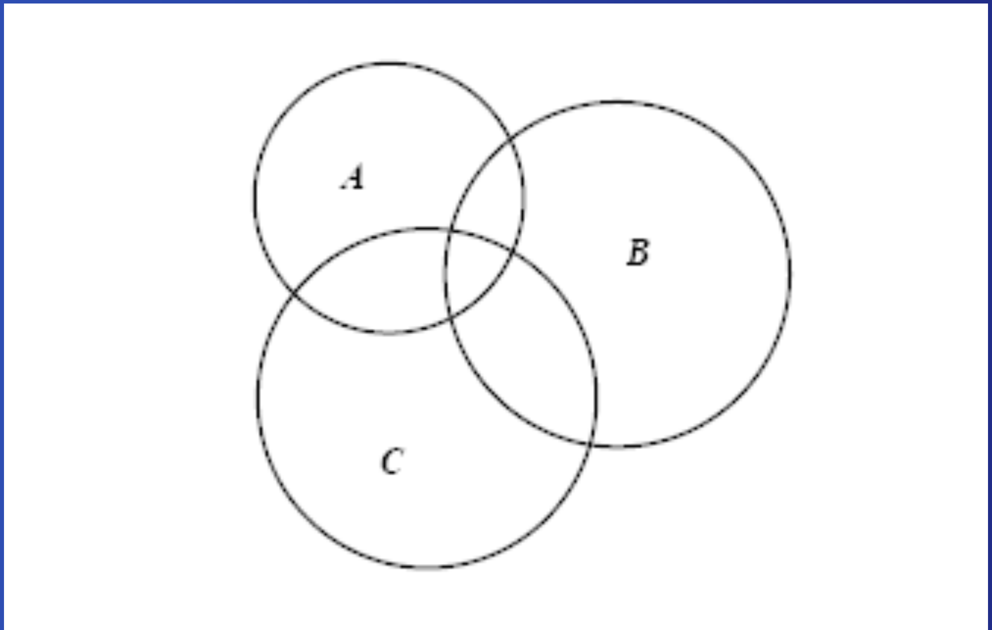
Jestliže pro každé $i \in I$ označíme A_i množinu všech těch objektů z Q, které mají vlastnost s indexem i, pak jde o to, jak zjistit, kolik prvků má množina $A(0) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$.

Vennův diagram



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Vennův diagram



$$|Q| - |A \cup B \cup C| = |Q| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Princip inkluze a exkluze II

Věta. Buď Q konečná množina. Mějme konečnou indexovou množinu I a mějme konečný soubor množin A_i, kde $i \in I$, jež jsou všechny podmnožinami množiny Q. To znamená, že $A_i \subseteq Q$ pro každé $i \in I$.

Princip inkluze a exkluze II

Věta. Buď Q konečná množina. Mějme konečnou indexovou množinu I a mějme konečný soubor množin A_i, kde $i \in I$, jež jsou všechny podmnožinami množiny Q. To znamená, že $A_i \subseteq Q$ pro každé $i \in I$. Potom pro množinu $A(0) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$ platí

$$|A(0)| = \sum_{K \subseteq I} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| .$$

Princip inkluze a exkluze II

Věta. Buď Q konečná množina. Mějme konečnou indexovou množinu I a mějme konečný soubor množin A_i, kde $i \in I$, jež jsou všechny podmnožinami množiny Q. To znamená, že $A_i \subseteq Q$ pro každé $i \in I$. Potom pro množinu $A(0) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$ platí

$$|A(0)| = \sum_{K \subseteq I} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| .$$

Poznámka. Poněvadž $A_i \subseteq Q$ pro $i \in I$, klademe $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = Q$.

Princip inkluze a exkluze III

Vztah dokázaný v předchozí větě lze přepsat na

Princip inkluze a exkluze III

Vztah dokázaný v předchozí větě lze přepsat na

$$\left|Q - \bigcup_{i\in I} A_i\right| = |Q| - \sum_{i\in I} |A_i| + \sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq I\\ i\neq j}} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{\substack{\{i,j,k\}\subseteq I\\ i\neq j\neq k\neq i}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{|I|} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Princip inkluze a exkluze III

Vztah dokázaný v předchozí větě lze přepsat na

$$\left|Q - \bigcup_{i\in I} A_i\right| = |Q| - \sum_{i\in I} |A_i| + \sum_{\substack{\{i,j\}\subseteq I\\ i\neq j}} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{\substack{\{i,j,k\}\subseteq I\\ i\neq j\neq k\neq i}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{|I|} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Tento vztah kvůli střídání znamének bývá právě označován termínem **princip inkluze a exkluze**.

Princip inkluze a exkluze - příklady I

Příklad IE1. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Nechť S, resp. U jsou konečné množiny mající n, resp. k prvků. Je třeba určit, kolik existuje surjektivních zobrazení $g : S \to U$.

Princip inkluze a exkluze - příklady I

Příklad IE1. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Nechť S, resp. U jsou konečné množiny mající n, resp. k prvků. Je třeba určit, kolik existuje surjektivních zobrazení $g : S \to U$.

Řešení. Jako základní množinu Q vezmeme množinu všech možných zobrazení $f : S \to U$. Indexovou množinu I položíme rovnu U.

Princip inkluze a exkluze - příklady I

Příklad IE1. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Nechť S, resp. U jsou konečné množiny mající n, resp. k prvků. Je třeba určit, kolik existuje surjektivních zobrazení $g : S \to U$.

Řešení. Jako základní množinu Q vezmeme množinu všech možných zobrazení $f : S \to U$. Indexovou množinu I položíme rovnu U.

Pro $w \in U$ máme $A_w = \{f : S \to U\,;\ w \notin f(S)\}$.

Princip inkluze a exkluze - příklady I

Příklad IE1. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Nechť S, resp. U jsou konečné množiny mající n, resp. k prvků. Je třeba určit, kolik existuje surjektivních zobrazení $g: S \to U$.

Řešení. Jako základní množinu Q vezmeme množinu všech možných zobrazení $f: S \to U$. Indexovou množinu I položíme rovnu U.

Pro $w \in U$ máme $A_w = \{f : S \to U\,;\ w \notin f(S)\}$.

Tedy $A(0) = \{f : S \to U\,;\ f(S) = U\}$.

Princip inkluze a exkluze - příklady II

Víme, že

$$(*) \qquad |A(0)| = \sum_{V \subseteq U} (-1)^{|V|} \cdot \left| \bigcap_{w \in V} A_w \right| .$$

Princip inkluze a exkluze - příklady II

Víme, že

$$(*) \qquad |A(0)| = \sum_{V \subseteq U} (-1)^{|V|} \cdot \left| \bigcap_{w \in V} A_w \right| .$$

Zároveň

$$\begin{aligned} \bigcap_{w\in V} A_w &= \{f : S \to U\,;\ V \cap f(S) = \emptyset\} \\ &= \{f : S \to U\,;\ f(S) \subseteq U - V\}. \end{aligned}$$

Princip inkluze a exkluze - příklady II

Ale

$$\begin{aligned}|\bigcap_{w\in V} A_w| &= |\{f:\ S\to U\ ;\ f(S)\subseteq U-V\}| \\ &= |\{f:\ S\to U-V\}| = |U-V|^{|S|} \\ &= |U-V|^n = (k-|V|)^n.\end{aligned}$$

Princip inkluze a exkluze - příklady II

Ale

$$\begin{aligned} \left|\bigcap_{w\in V} A_w\right| &= |\{f : S \to U\,;\; f(S) \subseteq U - V\}| \\ &= |\{f : S \to U - V\}| = |U - V|^{|S|} \\ &= |U - V|^n = (k - |V|)^n. \end{aligned}$$

Po dosazení do $(*)$ obdržíme

$$(**) \qquad \begin{aligned} |A(0)| &= \sum_{V\subseteq U} (-1)^{|V|} \cdot (k - |V|)^n \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot (k - j)^n. \end{aligned}$$

Princip inkluze a exkluze - příklady IV

Příklad IE2. Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je **pevný bod** takto permutace $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, platí-li, že $\boxed{\sigma(i) = i}$.

Princip inkluze a exkluze - příklady IV

Příklad IE2. Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je **pevný bod** takto permutace $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, platí-li, že $\boxed{\sigma(i) = i}$.

Určete, kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které nemají ani jeden pevný bod.

Princip inkluze a exkluze - příklady IV

Příklad IE2. Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je **pevný bod** takto permutace $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, platí-li, že $\boxed{\sigma(i) = i}$.

Určete, kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, které nemají ani jeden pevný bod.

Řešení. Jako základní množinu Q vezmeme množinu $\boxed{S_n}$ všech možných permutací $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Princip inkluze a exkluze - příklady IV

Příklad IE2. Řekneme, že číslo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je **pevný bod** takto permutace $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, platí-li, že $\boxed{\sigma(i) = i}$.

Určete, kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, které nemají ani jeden pevný bod.

Řešení. Jako základní množinu Q vezmeme množinu $\boxed{S_n}$ všech možných permutací $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Za indexovou množinu I vezmeme množinu $\boxed{\{1, 2, \dots, n\}}$.

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ položíme

$$\boxed{A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}.}$$

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ položíme

$$\boxed{A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}.}$$

Množinu $A(0)$ tvoří právě ty permutace $\sigma \in S_n$, které nemají žádný pevný bod.

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ položíme

$$\boxed{A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}.}$$

Množinu $A(0)$ tvoří právě ty permutace $\sigma \in S_n$, které nemají žádný pevný bod.

Podle principu inkluze a exkluze máme

$$(\square) \qquad |A(0)| = \sum_{K \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|K|} \cdot \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right| .$$

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Množinu $\bigcap_{i \in K} A_i$ tvoří právě ty permutace $\sigma \in S_n$, pro něž $\boxed{\text{každé číslo z } K}$ je pevným bodem.

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Množinu $\bigcap_{i \in K} A_i$ tvoří právě ty permutace $\sigma \in S_n$, pro něž $\boxed{\text{každé číslo z } K}$ je pevným bodem.

Tj. permutace množiny $\boxed{\{1, 2, \ldots, n\} - K}$.

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Množinu $\bigcap_{i \in K} A_i$ tvoří právě ty permutace $\sigma \in S_n$, pro něž $\boxed{\text{každé číslo z } K}$ je pevným bodem.

Tj. permutace množiny $\boxed{\{1, 2, \dots, n\} - K}$.

Máme pak $\left|\bigcap_{i \in K} A_i\right| = (n - |K|)!$.

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Množinu $\bigcap_{i\in K} A_i$ tvoří právě ty permutace $\sigma \in S_n$, pro něž $\boxed{\text{každé číslo z } K}$ je pevným bodem.

Tj. permutace množiny $\boxed{\{1,2,\ldots,n\} - K}$.

Máme pak $\left|\bigcap_{i\in K} A_i\right| = (n - |K|)!\,.$ Dosazením do rovnosti (□) dostáváme

$$(\square\square)\quad |A(0)| = \sum_{K\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|K|}\cdot(n-|K|)!\,.$$

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Jednotliví sčítanci v sumě (□□) $\boxed{\text{závisí pouze}}$ na $|K|$.

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Jednotlliví sčítanci v sumě (□□) $\boxed{\text{závisí pouze}}$ na $|K|$.

Pro každé $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ je počet těch sčítanců, v nichž $|K| = \ell$, roven $\boxed{\binom{n}{\ell}}$.

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Jednotliví sčítanci v sumě (□□) $\boxed{\text{závisí pouze}}$ na $|K|$.

Pro každé $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ je počet těch sčítanců, v nichž $|K| = \ell$, roven $\boxed{\binom{n}{\ell}}$. Je tedy

$$
\begin{aligned}
(\square\square\square) \quad |A(0)| &= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \cdot \binom{n}{\ell} \cdot (n-\ell)! \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \cdot \frac{n!}{\ell!}
\end{aligned}
$$

Princip inkluze a exkluze - příklady V

Jednotliví sčítanci v sumě (□□) $\boxed{\text{závisí pouze}}$ na $|K|$.

Pro každé $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ je počet těch sčítanců, v nichž $|K| = \ell$, roven $\boxed{\binom{n}{\ell}}$. Je tedy

$$(□□□) \quad |A(0)| = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \cdot \binom{n}{\ell} \cdot (n-\ell)!$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \cdot \frac{n!}{\ell!} \longrightarrow \boxed{\frac{n!}{e}}.$$