Zobrazení

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

V této kapitole připomeneme pojem zobrazení množiny a pojmy s ním spjaté (prosté zobrazení, surjektivní zobrazení, bijektivní zobrazení). Pokračujeme pak pojmem relace mezi množinami, skládání relací, inverzní relace. Následně zavedeme pojem *mohutnosti množin* a dokážeme Cantorovu větu.

Obsah přednášky

- Úvod
- Zobrazení.
- Injektivní, surjektivní a bijektivní zobrazení.
- Skládání zobrazení.

Obsah přednášky

- Úvod
- Zobrazení.
- Injektivní, surjektivní a bijektivní zobrazení.
- Skládání zobrazení.

- Relace mezi množinami.
- Skládání relací, inverzní relace.

Obsah přednášky

- Úvod
- Zobrazení.
- Injektivní, surjektivní a bijektivní zobrazení.
- Skládání zobrazení.

- Relace mezi množinami.
- Skládání relací, inverzní relace.

- Ekvivalence množin, mohutnost.
- Cantorova věta, spočetné a nespočetné množiny.

Definice zobrazení

Nechť A, B jsou libovolné množiny.
Zobrazením $f : A \rightarrow B$ množiny A do množiny B rozumíme předpis, který každému prvku $a \in A$ přiřazuje právě jeden prvek $b \in B$.

Definice zobrazení

Nechť A, B jsou libovolné množiny.
Zobrazením $f : A \to B$ množiny A do množiny B rozumíme předpis, který každému prvku $a \in A$ přiřazuje právě jeden prvek $b \in B$.

Pro takové prvky pak píšeme, že $b = f(a)$, a říkáme, že b je obrazem prvku a při zobrazení f.

Definice zobrazení

Nechť A, B jsou libovolné množiny.
Zobrazením $f : A \to B$ množiny A do množiny B rozumíme předpis, který každému prvku $a \in A$ přiřazuje právě jeden prvek $b \in B$.

Pro takové prvky pak píšeme, že $b = f(a)$, a říkáme, že b je obrazem prvku a při zobrazení f.

Uvedené vymezení daného pojmu ovšem obsahuje blíže nespecifikovaný pojem „předpis”. Přesnou definici si uvedeme v kapitole o relacích.

Vlastnosti zobrazení I

Jestliže $f : A \to B$ je zobrazení, pak množina A se nazývá **definiční obor** a množina B se nazývá **obor hodnot** tohoto zobrazení.

Vlastnosti zobrazení I

Jestliže $f : A \to B$ je zobrazení, pak množina A se nazývá **definiční obor** a množina B se nazývá **obor hodnot** tohoto zobrazení.

Dvě zobrazení $f : A \to B$, $g : C \to D$ se rovnají (což budeme stručně vyjadřovat zápisem $f = g$), jestliže:

$$A = C \ \wedge \ B = D \ \wedge f(x) = g(x) \quad \text{pro každé } x \in A$$

Vlastnosti zobrazení I

Jestliže $f : A \to B$ je zobrazení, pak množina A se nazývá **definiční obor** a množina B se nazývá **obor hodnot** tohoto zobrazení.

Dvě zobrazení $f : A \to B$, $g : C \to D$ se rovnají (což budeme stručně vyjadřovat zápisem $f = g$), jestliže:

$$A = C \ \wedge \ B = D \ \wedge f(x) = g(x) \quad \text{pro každé } x \in A$$

tj. jestliže se rovnají jejich definiční obory, obory hodnot a příslušné předpisy.

Vlastnosti zobrazení II

V opačném případě (tzn. není – li splněna alespoň jedna z předchozích tří podmínek) se obě zobrazení nerovnají, což budeme stručně zapisovat ve tvaru $f \neq g$.

Vlastnosti zobrazení II

V opačném případě (tzn. není – li splněna alespoň jedna z předchozích tří podmínek) se obě zobrazení nerovnají, což budeme stručně zapisovat ve tvaru $f \neq g$.

K zadání zobrazení je nutno zadat definiční obor, obor hodnot a příslušný předpis. Přitom předpis je možno zadat různými způsoby.

Příklady zobrazení I

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{r, s, t, u, v\}$ a položíme :

$$f(a) = u\,, \quad f(b) = r\,, \quad f(c) = v\,, \quad f(d) = t.$$

Příklady zobrazení I

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{r, s, t, u, v\}$ a položíme :

$$f(a) = u\,, \quad f(b) = r\,, \quad f(c) = v\,, \quad f(d) = t.$$

- $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$ a položíme :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{pro } x \geq 0 \\ -2x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Příklady zobrazení II

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ a položíme : $f(x) = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$

Příklady zobrazení II

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ a položíme : $f(x) = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
- $A = \mathbb{R}$, $B = [-1, 1]$ a položíme : $f(x) = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Surjektivní a injektivní zobrazení

Nechť A, B jsou množiny. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **surjekce**, nebo též **zobrazení na** množinu B, platí-li, že každý prvek $b \in B$ má alespoň jeden vzor, tedy prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$.

Surjektivní a injektivní zobrazení

Nechť A, B jsou množiny. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **surjekce**, nebo též **zobrazení na množinu** B, platí-li, že každý prvek $b \in B$ má alespoň jeden vzor, tedy prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$.

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **injekce**, nebo též **prosté zobrazení**, splňuje-li podmínku

$$(\forall a, a' \in A)(f(a) = f(a') \implies a = a').$$

Surjektivní a injektivní zobrazení

Nechť A, B jsou množiny. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **surjekce**, nebo též **zobrazení na množinu** B, platí-li, že každý prvek $b \in B$ má alespoň jeden vzor, tedy prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$.
Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **injekce**, nebo též **prosté zobrazení**, splňuje-li podmínku

$$(\forall a, a' \in A)(f(a) = f(a') \implies a = a').$$

Při takovém zobrazení f každý prvek $b \in B$ má nanejvýš jeden vzor, tedy prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$.

Příklady injektivního a surjektivního zobrazení I

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{r, s, t, u, v\}$ a položíme :

$$f(a) = u\,, \quad f(b) = r\,, \quad f(c) = v\,, \quad f(d) = t.$$

Příklady injektivního a surjektivního zobrazení I

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{r, s, t, u, v\}$ a položíme :

$$f(a) = u\,, \quad f(b) = r\,, \quad f(c) = v\,, \quad f(d) = t.$$

Zobrazení je injektivní a není surjektivní.

Příklady injektivního a surjektivního zobrazení II

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$ a položíme :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{pro } x \geq 0 \\ -2x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Příklady injektivního a surjektivního zobrazení II

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$ a položíme :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{pro } x \geq 0 \\ -2x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Zobrazení je injektivní a surjektivní.

Příklady injektivního a surjektivního zobrazení III

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ a položíme : $f(x) = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$

Příklady injektivního a surjektivního zobrazení III

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ a položíme : $f(x) = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$

Zobrazení není injektivní a není surjektivní.

Příklady injektivního a surjektivního zobrazení IV

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \mathbb{R}$, $B = [-1, 1]$ a položíme : $f(x) = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$

Příklady injektivního a surjektivního zobrazení IV

Definujme zobrazení $f : A \longrightarrow B$ takto:

- $A = \mathbb{R}$, $B = [-1, 1]$ a položíme : $f(x) = \sin x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$

Zobrazení není injektivní a je surjektivní.

Vzájemně jednoznačné zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **bijekce**, nebo též **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny A na množinu B, je-li f současně injekce i surjekce.

Vzájemně jednoznačné zobrazení

Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá **bijekce**, nebo též **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny A na množinu B, je-li f současně injekce i surjekce.

Nechť A, B jsou množiny a nechť $f: A \to B$ je bijekce. Položme

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

Vzájemně jednoznačné zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **bijekce**, nebo též **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny A na množinu B, je-li f současně injekce i surjekce.

Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je bijekce. Položme

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

Máme tedy zobrazení $f^{-1} : B \to A$, které samo je rovněž bijekce, neboť zase požadavky nutné k tomu, aby f bylo zobrazení, znamenají, že f^{-1} je surjekce a injekce.

Vzájemně jednoznačné zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **bijekce**, nebo též **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny A na množinu B, je-li f současně injekce i surjekce.
Nechť A, B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je bijekce.
Položme

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

Máme tedy zobrazení $f^{-1} : B \to A$, které samo je rovněž bijekce, neboť zase požadavky nutné k tomu, aby f bylo zobrazení, znamenají, že f^{-1} je surjekce a injekce.

Říkáme, že f^{-1} je **inverzní zobrazení** k zobrazení f.

Příklad bijektivního zobrazení

Zobrazení $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ z příkladu II je bijektivní.

Příklad bijektivního zobrazení

Zobrazení $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ z příkladu II je bijektivní.

Existuje tedy k němu zobrazení inverzní $f^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Příklad bijektivního zobrazení

Zobrazení $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ z příkladu II je bijektivní.

Existuje tedy k němu zobrazení inverzní $f^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Lehce se zjistí, že:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{pro každé liché } x \in \mathbb{N} \\ -\frac{x}{2} & \text{pro každé sudé } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Složené zobrazení I

Nechť $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ jsou zobrazení. Potom zobrazení $(g \circ f) : A \longrightarrow C$ definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g\,(\,f(x)\,) \qquad \text{pro každé} \quad x \in A$$

se nazývá **složené zobrazení** (ze zobrazení f a g, v tomto pořadí).

Složené zobrazení II

Složené zobrazení je možno definovat pouze v případě, že obor hodnot prvního zobrazení je roven definičnímu oboru druhého zobrazení.

Složené zobrazení II

Složené zobrazení je možno definovat pouze v případě, že obor hodnot prvního zobrazení je roven definičnímu oboru druhého zobrazení.

Poznamenejme ještě, že symbol $g \circ f$ čteme buď "g kolečko f" nebo "g po f".

Složené zobrazení II

Složené zobrazení je možno definovat pouze v případě, že obor hodnot prvního zobrazení je roven definičnímu oboru druhého zobrazení.

Poznamenejme ještě, že symbol $g \circ f$ čteme buď "g kolečko f" nebo "g po f".

U zápisu složeného zobrazení $g \circ f$ si ještě všimněme toho, že i když se nejprve provádí zobrazení f a potom zobrazení g, je zaveden zápis "v obráceném pořadí". Konvence, podle které se argument x píše napravo od symbolu zobrazení f.

Identické zobrazení - I

Definujme pro libovolnou množinu A zobrazení $id_A : A \to A$ předpisem

$$(\forall a \in A)(id_A(a) = a).$$

Identické zobrazení - I

Definujme pro libovolnou množinu A zobrazení $id_A : A \to A$ předpisem

$$(\forall a \in A)(id_A(a) = a).$$

Toto zobrazení se nazývá **identita** na A.

Identické zobrazení - I

Definujme pro libovolnou množinu A zobrazení $id_A : A \to A$ předpisem

$$(\forall a \in A)(id_A(a) = a).$$

Toto zobrazení se nazývá **identita** na A.

Je jasné, že pak pro libovolné množiny A, B a pro libovolné zobrazení $f : A \to B$ platí

$$f \circ id_A = f = id_B \circ .,$$

Identické zobrazení - II

Je-li f navíc bijekce, pak platí také

$$f^{-1} \circ f = id_A, \quad f \circ f^{-1} = id_B.$$

Identické zobrazení - II

Je-li f navíc bijekce, pak platí také

$$f^{-1} \circ f = id_A, \quad f \circ f^{-1} = id_B.$$

Věta. Nechť A, B jsou množiny a nechť

$$f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow A$$

jsou zobrazení. Pak f je bijekce s vlastností, že $f^{-1} = g$, právě tehdy, když platí $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$.

Identické zobrazení - III

Příklad. Nechť $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, resp˙ $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ jsou zobrazení, definovaná takto :

$f(x) = x + 1$ pro $\forall\, x \in \mathbb{N}$

resp. $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 1 \\ x - 1 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}$$

Zřejmě platí : $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ (neboť $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$), f není surjektivní (1 nemá při zobrazení f žádný vzor) a g není injektivní (neboť $g(1) = g(2)$).

Základní tvrzení o zobrazeních

Věta Nechť $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ jsou zobrazení. Pak platí :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \, .$$

Jsou-li navíc f, g injektivní (surjektivní) zobrazení, je $g \circ f$ injektivní (surjektivní) zobrazení. Obráceně, je-li $g \circ f$ injektivní (surjektivní) zobrazení, je f (g) injektivní (surjektivní) zobrazení.

Restrinkce zobrazení

Definice. Nechť $f : A \longrightarrow B$ je zobrazení a nechť $M \subseteq A$. Pak zobrazení

$$h : M \longrightarrow B \text{ definované: } \; h(x) = f(x)\,, \text{ pro } x \in M$$

se nazývá **zúžení zobrazení** (**restrinkce**) f na množinu M a obvykle se značí symbolem $f|M$ (což čteme: "f zúženo na M").

Restrinkce zobrazení

Definice. Nechť $f : A \longrightarrow B$ je zobrazení a nechť $M \subseteq A$. Pak zobrazení

$h : M \longrightarrow B$ definované : $h(x) = f(x)$, pro $x \in M$

se nazývá **zúžení zobrazení** (**restrinkce**) f na množinu M a obvykle se značí symbolem $f|M$ (což čteme: ”f zúženo na M”).

Zúžením zobrazení se mohou podstatně změnit některé jeho základní vlastnosti.

Restrinkce zobrazení - příklad

Mějme zobrazení

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2\ ,\ \text{pro každé } x \in \mathbb{R}$$

a zkonstruujeme jeho zúžení na množinu $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel,

Restrinkce zobrazení - příklad

Mějme zobrazení

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2\ , \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}$$

a zkonstruujeme jeho zúžení na množinu $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel, tzn. máme

$$f|\mathbb{R}^+ : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ f|\mathbb{R}^+(x) = x^2\ , \text{ pro } x \in \mathbb{R}^+\ ,$$

pak vidíme, že zobrazení f není injektivní, zatímco zúžení zobrazení $f|\mathbb{R}^+$ je injektivní.

Obraz při zobrazení

Jsou-li A, B množiny a je-li $f : A \to B$ zobrazení, pak množinu $\operatorname{Im} f = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$ značíme rovněž $f(A)$ a nazýváme ji **obraz** při zobrazení f.

Obraz při zobrazení

Jsou-li A, B množiny a je-li $f : A \to B$ zobrazení, pak množinu $\mathrm{Im}\, f = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$ značíme rovněž $f(A)$ a nazýváme ji **obraz** při zobrazení f.

Pro libovolné dvě množiny A, B symbolem B^A značíme množinu všech zobrazení $f : A \to B$.

Uspořádaná dvojice prvků - I

Intuitivní představa - ke každým dvěma prvkům x, y lze přiřadit nový prvek (x, y), nazývaný uspořádanou dvojicí tak, že dvě uspořádané dvojice (x, y) a (r, s) jsou si rovny právě když $x = r$ a $y = s$.

Uspořádaná dvojice prvků - I

Intuitivní představa - ke každým dvěma prvkům x, y lze přiřadit nový prvek (x, y), nazývaný uspořádanou dvojicí tak, že dvě uspořádané dvojice (x, y) a (r, s) jsou si rovny právě když $x = r$ a $y = s$.

V uspořádané dvojici (x, y) tedy záleží na pořadí prvků x, y, přičemž prvek x se nazývá **první složka** a prvek y se nazývá **druhá složka** uspořádané dvojice (x, y).

Uspořádaná dvojice prvků - II

Konkrétní realizace - uspořádanou dvojicí prvků s první složkou a a druhou složkou b rozumíme množinu

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Uspořádaná dvojice prvků - II

Konkrétní realizace - uspořádanou dvojicí prvků s první složkou a a druhou složkou b rozumíme množinu

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Je jasné, že pak pro libovolné prvky a, b, c, d platí

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \ \& \ b = d.$$

Uspořádaná n – tice prvků

Analogickým způsobem lze pro libovolné $n \geq 2$ zavést pojem **uspořádaná n – tice prvků**, kterou označujeme symbolem $(a_1, a_2, \ldots a_n)$. Přitom klademe s použitím indukce

$$(a_1, \ldots, a_n) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n),$$

Uspořádaná n – tice prvků

Analogickým způsobem lze pro libovolné $n \geq 2$ zavést pojem **uspořádaná n – tice prvků**, kterou označujeme symbolem $(a_1, a_2, \dots a_n)$. Přitom klademe s použitím indukce

$$(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n),$$

Nutně pak se dvě uspořádané n – tice prvků rovnají právě když se rovnají jejich odpovídající si složky.

Kartézský součin dvou množin

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **kartézský součin** $A \times B$ jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$.

Kartézský součin dvou množin

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **kartézský součin** $A \times B$ jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$.
To znamená, že klademe

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B\}.$$

Kartézský součin dvou množin

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **kartézský součin** $A \times B$ jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$.
To znamená, že klademe

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B\}.$$

Je-li $A = B$, nazýváme množinu $A \times A$ **kartézským čtvercem** množiny A a značíme ji A^2.

Vlastnosti kartézského součinu

Množiny $A \times B$ a $B \times A$ jsou obecně různé.

Vlastnosti kartézského součinu

Množiny $A \times B$ a $B \times A$ jsou obecně různé.
Pro libovolné množiny A, B, C také množiny

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\},$$

$$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\}$$

jsou formálně různé.

Vlastnosti kartézského součinu

Množiny $A \times B$ a $B \times A$ jsou obecně různé.
Pro libovolné množiny A, B, C také množiny

$$(A \times B) \times C = \{((a,b),c) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\},$$
$$A \times (B \times C) = \{(a,(b,c)) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ c \in C\}$$

jsou formálně různé.
Rozdíl mezi objekty $((a,b),c)$ a $(a,(b,c))$ se přehlíží.

Kartézský součin konečně mnoha množin I

Pro každé $n \geq 2$ a libovolné množiny $A_1, \dots, A_n$ definujeme jejich **kartézský součin** $A_1 \times \cdots \times A_n$ jako množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \,|\, a_1 \in A_1 \;\&\; \dots \;\&\; a_n \in A$$

Kartézský součin konečně mnoha množin I

Pro každé $n \geq 2$ a libovolné množiny $A_1, \ldots, A_n$ definujeme jejich **kartézský součin** $A_1 \times \cdots \times A_n$ jako množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, a_1 \in A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; a_n \in A$$

Kartézský součin $A_1 \times \cdots \times A_n$ je pak definován jako součin $(\ldots(A_1 \times A_2) \times \ldots) \times A_n$, tedy s uzávorkováním odleva.

Kartézský součin konečně mnoha množin II

Jestliže $A_1 = \cdots = A_n = A$, dostáváme tak definici **kartézské mocniny** A^n pro všechna $n \geq 2$.

Kartézský součin konečně mnoha množin II

Jestliže $A_1 = \cdots = A_n = A$, dostáváme tak definici **kartézské mocniny** A^n pro všechna $n \geq 2$.

Navíc klademe také $A^1 = A$ a definujeme ještě A^0 jako mmnožinu $\{\emptyset\}$.

Základní tvrzení o kartézském součinu

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C),$$
$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$$

Základní tvrzení o kartézském součinu

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C),$$
$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$$

Analogické rovnosti platí i pro $C \times (A \cup B)$, $C \times (A \cap B)$ a $C \times (A - B)$.

Základní tvrzení o kart. součinu II

Tvrzení. Pro libovolnou množinu C, pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor množin A_i, kde $i \in I$, platí:

Základní tvrzení o kart. součinu II

Tvrzení. Pro libovolnou množinu C, pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor množin A_i, kde $i \in I$, platí:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times C = \bigcup_{i\in I} (A_i \times C),$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times C = \bigcap_{i\in I} (A_i \times C).$$

Relace mezi množinami

Nechť A, B jsou libovolné množiny. Pak libovolná podmnožina ϱ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **relace mezi množinami** A a B.

Relace mezi množinami

Nechť A, B jsou libovolné množiny. Pak libovolná podmnožina ϱ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **relace mezi množinami** A a B.

Jsou-li $a \in A$, $b \in B$ takové prvky, že $(a, b) \in \varrho$, pak říkáme, že prvek a je v relaci ϱ s prvkem b. Píšeme $a \, \varrho \, b$. Jestliže $(a, b) \notin \varrho$, píšeme obvykle $a \not\varrho \, b$.

Relace mezi množinami

Nechť A, B jsou libovolné množiny. Pak libovolná podmnožina ϱ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **relace mezi množinami** A a B.

Jsou-li $a \in A$, $b \in B$ takové prvky, že $(a, b) \in \varrho$, pak říkáme, že prvek a je v relaci ϱ s prvkem b. Píšeme $a\,\varrho\,b$. Jestliže $(a, b) \notin \varrho$, píšeme obvykle $a \not\varrho\, b$.
Relace mezi množinami je opět množina.
K označení množiny obvykle používáme malé řecké písmeno.

Příklady relací I

Definovat relaci ϱ mezi množinami A, B znamená popsat jistou podmnožinu množiny $A \times B$, tj. jednoznačně určit všechny uspořádané dvojice z $A \times B$, které patří do ϱ .

Příklady relací I

Definovat relaci ϱ mezi množinami A, B znamená popsat jistou podmnožinu množiny $A \times B$, tj. jednoznačně určit všechny uspořádané dvojice z $A \times B$, které patří do ϱ .

Příklad R 1. Nechť $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$. Pak $\varrho = \{(a, y), (c, y), (c, z)\}$ je relací mezi množinami A, B.

Příklady relací II

Příklad R 2. Nechť $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$. Pak $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

Příklady relací II

Příklad R 2. Nechť $A = \mathbb{N}\,,\ \ B = \mathbb{N}$. Pak $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y - x$ je kladné číslo$\}$ je relací mezi množinami A, B.

Je zřejmé, že v tomto případě je číslo x v relaci ϱ s číslem y právě tehdy, když x je menší než y (při běžném uspořádání čísel podle velikosti).

Příklady relací IIIa

Příklad R 3. Nechť A, B jsou libovolné množiny. Uvedeme dva speciální případy relací mezi množinami A, B:

Příklady relací IIIa

Příklad R 3. Nechť A, B jsou libovolné množiny. Uvedeme dva speciální případy relací mezi množinami A, B:

- prázdná množina je zřejmě podmnožinou $A \times B$, a tedy $\varrho = \emptyset$ je relací mezi množinami A, B, kterou budeme nazývat **prázdná relace** mezi A, B, tj. žádný prvek z A není v relaci s žádným prvkem z B .

Příklady relací IIIb

Podmnožinou $A \times B$ je množina $A \times B$ samotná.

Příklady relací IIIb

Podmnožinou $A \times B$ je množina $A \times B$ samotná.

- Tedy $\varrho = A \times B$ je relací mezi množinami A, B, kterou budeme nazývat **univerzální relace** mezi A, B, tj. každý prvek z množiny A je v relaci s každým prvkem z množiny B .

Příklady relací IV

Příklad R 4. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ potenční množina množiny A. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou podmnožiny $X \subseteq A$.

Příklady relací IV

Příklad R 4. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ potenční množina množiny A. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou podmnožiny $X \subseteq A$.

Definujme podmnožinu $\varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(A)$ takto:

$$\varrho = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}.$$

Pak ϱ je relace mezi množinami A a $\mathcal{P}(A)$.

Příklady relací V

Příklad R 5. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ potenční množina množiny A. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou podmnožiny $X \subseteq A$.

Příklady relací V

Příklad R 5. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ potenční množina množiny A. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou podmnožiny $X \subseteq A$.

Definujme podmnožinu množiny $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ takto:

$$R_{\subseteq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \;:\; X \subseteq Y\}.$$

Pak $R_{\subseteq}$ je relace na množině $\mathcal{P}(A)$.

Příklady relací VI

Příklad R 6. Buď A množina. Množina $\{(x, x) : x \in A\}$ je relace na A.

Příklady relací VI

Příklad R 6. Buď A množina. Množina $\{(x, x) : x \in A\}$ je relace na A.

Mluvíme o ***relaci rovnosti*** a označujeme symbolem Δ_A nebo ι.

Zobrazení a relace

Pojem zobrazení je možné naprosto korektně definovat pomocí relací takto:

Zobrazení a relace

Pojem zobrazení je možné naprosto korektně definovat pomocí relací takto:

Nechť A, B jsou množiny a nechť f je relace mezi množinami A, B, splňující podmínku: ke každému $x \in A$ existuje jediné $y \in B$ tak, že $(x, y) \in f$.

Zobrazení a relace

Pojem zobrazení je možné naprosto korektně definovat pomocí relací takto:

Nechť A, B jsou množiny a nechť f je relace mezi množinami A, B, splňující podmínku: ke každému $x \in A$ existuje jediné $y \in B$ tak, že $(x, y) \in f$.

Pak uspořádanou trojici (A, B, f) nazýváme **zobrazením množiny A do množiny B**.

Definiční obor a obor hodnot relace

Nechť $\varrho \subseteq A \times B$ je libovolná relace mezi A a B.

Definiční obor a obor hodnot relace

Nechť $\varrho \subseteq A \times B$ je libovolná relace mezi A a B.

Definičním oborem $\mathrm{Dom}\,\varrho$ relace ϱ rozumíme množinu

$$\mathrm{Dom}\,\varrho = \{a \in A \mid (\exists b \in B)(a\,\varrho\,b)\},$$

Definiční obor a obor hodnot relace

Nechť $\varrho \subseteq A \times B$ je libovolná relace mezi A a B.

Definičním oborem $\mathrm{Dom}\,\varrho$ relace ϱ rozumíme množinu

$$\mathrm{Dom}\,\varrho = \{a \in A \mid (\exists b \in B)(a\,\varrho\,b)\},$$

tedy množinu všech těch prvků z A, které jsou v relaci ϱ alespoň s jedním prvkem z B.

Definiční obor a obor hodnot relace

Nechť $\varrho \subseteq A \times B$ je libovolná relace mezi A a B.

Definičním oborem $\operatorname{Dom} \varrho$ relace ϱ rozumíme množinu

$$\operatorname{Dom} \varrho = \{a \in A \mid (\exists b \in B)(a \,\varrho\, b)\},$$

tedy množinu všech těch prvků z A, které jsou v relaci ϱ alespoň s jedním prvkem z B.
Oborem hodnot $\operatorname{Im} \varrho$ relace ϱ rozumíme množinu

$$\operatorname{Im} \varrho = \{b \in B \mid (\exists a \in A)(a \,\varrho\, b)\}.$$

Prázdné zobrazení

Je-li $A = \emptyset$, pak B^A je $B^\emptyset$, a to je množina všech zobrazení $f : \emptyset \to B$.

Prázdné zobrazení

Je-li $A = \emptyset$, pak B^A je $B^\emptyset$, a to je množina všech zobrazení $f : \emptyset \to B$.
Pro taková zobrazení f ovšem máme $f \subseteq \emptyset \times B$, ale $\emptyset \times B = \emptyset$, takže nutně $f = \emptyset$ je **prázdné zobrazení**.

Prázdné zobrazení

Je-li $A = \emptyset$, pak B^A je $B^\emptyset$, a to je množina všech zobrazení $f : \emptyset \longrightarrow B$.
Pro taková zobrazení f ovšem máme $f \subseteq \emptyset \times B$, ale $\emptyset \times B = \emptyset$, takže nutně $f = \emptyset$ je **prázdné zobrazení**.
To znamená, že $B^\emptyset = \{\emptyset\}$.

Prázdné zobrazení

Je-li $A = \emptyset$, pak B^A je $B^\emptyset$, a to je množina všech zobrazení $f : \emptyset \longrightarrow B$.
Pro taková zobrazení f ovšem máme $f \subseteq \emptyset \times B$, ale $\emptyset \times B = \emptyset$, takže nutně $f = \emptyset$ je **prázdné zobrazení**.
To znamená, že $B^\emptyset = \{\emptyset\}$.

Poněvadž při konstrukci nezáporných celých čísel bylo $0 = \emptyset$, je to důvod, proč jsme definovali množinu B^0 jako $\{\emptyset\}$.

Skládání relací

Nechť ϱ je relace mezi množinami A, B a nechť σ je relace mezi množinami B, C. Pak relace

Skládání relací

Nechť ϱ je relace mezi množinami A, B a nechť σ je relace mezi množinami B, C. Pak relace

$$\begin{aligned} \sigma \circ \varrho \quad = \quad & \{(x, y) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tak, že} \\ & (x, b) \in \varrho \wedge (b, y) \in \sigma\} \end{aligned}$$

Skládání relací

Nechť ϱ je relace mezi množinami A, B a nechť σ je relace mezi množinami B, C. Pak relace

$$\sigma \circ \varrho = \{(x, y) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tak, že } (x, b) \in \varrho \wedge (b, y) \in \sigma\}$$

se nazývá **složená relace** z relací ϱ a σ.

Skládání relací

Nechť ϱ je relace mezi množinami A, B a nechť σ je relace mezi množinami B, C. Pak relace

$$\begin{aligned}\sigma \circ \varrho \quad &= \quad \{(x, y) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tak, že} \\ &\qquad (x, b) \in \varrho \wedge (b, y) \in \sigma\}\end{aligned}$$

se nazývá **složená relace** z relací ϱ a σ.

Symbol $\sigma \circ \varrho$ pro složenou relaci čteme buď "σ kolečko ϱ" nebo "σ po ϱ".

Skládání relací - příklad I

Příklad R 7. Nechť $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{k, l, m, n\}$ a nechť je dána relace ϱ mezi množinami A, B a relace σ mezi množinami B, C takto:

$$\begin{aligned} \varrho &= \{(a, y), (c, y), (c, z)\} \\ \sigma &= \{(x, k), (x, l), (x, m), (x, n), (y, k), (y, n)\}. \end{aligned}$$

Skládání relací - příklad I

Příklad R 7. Nechť $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{k, l, m, n\}$ a nechť je dána relace ϱ mezi množinami A, B a relace σ mezi množinami B, C takto:

$$\begin{aligned} \varrho &= \{(a, y), (c, y), (c, z)\} \\ \sigma &= \{(x, k), (x, l), (x, m), (x, n), (y, k), (y, n)\}. \end{aligned}$$

Potom z definice složené relace ihned plyne, že $\sigma \circ \varrho = \{(a, k), (a, n), (c, k), (c, n)\}$.

Graf relace

Poznámka. Relace si můžeme znázorňovat graficky, zejména jsou – li množiny konečné.

ϱ .

Graf relace

Poznámka. Relace si můžeme znázorňovat graficky, zejména jsou – li množiny konečné.

Je – li například ϱ relací mezi množinami A, B , pak si znázorníme prvky obou množin jako body v rovině a bod $r \in A$ spojíme orientovanou šipkou s bodem $s \in B$ právě tehdy, když $(r, s) \in \varrho$.

ϱ .

Graf relace

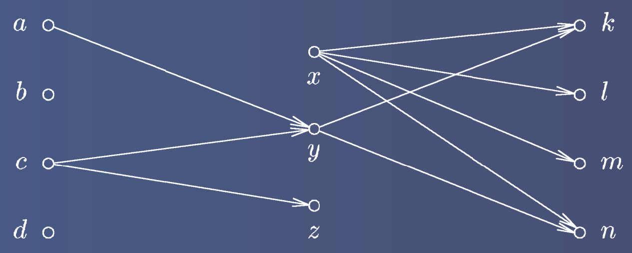
Poznámka. Relace si můžeme znázorňovat graficky, zejména jsou – li množiny konečné.

Je – li například ϱ relací mezi množinami A, B, pak si znázorníme prvky obou množin jako body v rovině a bod $r \in A$ spojíme orientovanou šipkou s bodem $s \in B$ právě tehdy, když $(r, s) \in \varrho$.

Výsledný obrázek budeme nazývat **graf relace** ϱ.

Graf relace - příklad I

Pro relace ϱ, σ z předchozího příkladu R 7. tak dostáváme následující grafy:



Pomocí grafů si můžeme schematicky znázornit i další pojmy, jako například skládání relací.

Znázorňování relací na množině I

Znázorňování relací na množině můžeme provést obrázkem, podobně jako u relací mezi množinami.

Znázorňování relací na množině I

Znázorňování relací na množině můžeme provést obrázkem, podobně jako u relací mezi množinami.
Jestliže je tedy (A, ϱ) množina s relací, pak prvky množiny A znázorníme jako body v rovině a z bodu x nakreslíme orientovanou šipku do bodu y právě tehdy, když $x \varrho y$.

Znázorňování relací na množině I

Znázorňování relací na množině můžeme provést obrázkem, podobně jako u relací mezi množinami.
Jestliže je tedy (A, ϱ) množina s relací, pak prvky množiny A znázorníme jako body v rovině a z bodu x nakreslíme orientovanou šipku do bodu y právě tehdy, když $x \varrho y$.
Přitom je samozřejmě možné, že šipka začíná a končí ve stejném bodu. Taková šipka se nazývá *smyčka*. Vzniklý obrázek budeme nazývat **uzlový graf relace** ϱ .

Znázorňování relací na množině II

Výhodné je rovněž vyjadřování relace ϱ na (konečné) množině A pomocí tabulky, kterou se strojíme následujícím způsobem: do záhlaví řádků a sloupců vypíšeme prvky množiny A, a to ve stejném pořadí.

Znázorňování relací na množině II

Výhodné je rovněž vyjadřování relace ϱ na (konečné) množině A pomocí tabulky, kterou se strojíme následujícím způsobem: do záhlaví řádků a sloupců vypíšeme prvky množiny A, a to ve stejném pořadí.
Do průsečíku řádku označeného x a sloupce označeného y pak napíšeme jedničku, je – li $x \varrho y$, resp. napíšeme nulu, je – li $x \not\varrho y$.

Nechť $A = \{a, b, c, d\}$ a nechť například $\varrho = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, c)\}$. Potom ϱ je relace na množině A.

Skládání relací - příklad II

Příklad R.8. Buď A množina.

Skládání relací - příklad II

Příklad R.8. Buď A množina. Uvažme opět její potenční množinu $\mathcal{P}(A)$. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou všechny podmnožiny $X \subseteq A$.

Skládání relací - příklad II

Příklad R.8. Buď A množina. Uvažme opět její potenční množinu $\mathcal{P}(A)$. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou všechny podmnožiny $X \subseteq A$.

Uvažme dále potenční množinu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Prvky množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ jsou libovolné podmnožiny $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Skládání relací - příklad II

Příklad R.8. Buď A množina. Uvažme opět její potenční množinu $\mathcal{P}(A)$. Prvky množiny $\mathcal{P}(A)$ jsou všechny podmnožiny $X \subseteq A$.

Uvažme dále potenční množinu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Prvky množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ jsou libovolné podmnožiny $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Takové podmnožiny $\mathcal{Q}$ ale nejsou nic jiného než soubory některých podmnožin $X \subseteq A$.

Skládání relací - příklad II

Pro každý takový soubor $\mathcal{Q}$ označme stručně $\bigcup \mathcal{Q}$ sjednocení souboru $\mathcal{Q}$, to znamená sjednocení všech těch podmnožin $X \subseteq A$, které jsou prvky souboru $\mathcal{Q}$.

Skládání relací - příklad II

Pro každý takový soubor $\mathcal{Q}$ označme stručně $\bigcup \mathcal{Q}$ sjednocení souboru $\mathcal{Q}$, to znamená sjednocení všech těch podmnožin $X \subseteq A$, které jsou prvky souboru $\mathcal{Q}$. V příkladu R.4 jsme definovali relaci $\varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(A)$ předpisem:

$$\varrho = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}.$$

Skládání relací - příklad II

Pro každý takový soubor $\mathcal{Q}$ označme stručně $\bigcup \mathcal{Q}$ sjednocení souboru $\mathcal{Q}$, to znamená sjednocení všech těch podmnožin $X \subseteq A$, které jsou prvky souboru $\mathcal{Q}$. V příkladu R.4 jsme definovali relaci $\varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(A)$ předpisem:

$$\varrho = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}.$$

Definujme podobně relaci $\eta \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ předpisem:

$$\eta = \{(X, \mathcal{Q}) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid X \in \mathcal{Q}\}.$$

Skládání relací - příklad II

Pak složená relace $\eta \circ \varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ má podle předchozí definice tvar:

Skládání relací - příklad II

Pak složená relace $\eta \circ \varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ má podle předchozí definice tvar:

$$\begin{aligned} \eta \circ \varrho = \{ \; & (a, \mathcal{Q}) \in A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \\ & (\exists X \in \mathcal{P}(A))(a \in X \;\&\; X \in \mathcal{Q})\}, \end{aligned}$$

Skládání relací - příklad II

Pak složená relace $\eta \circ \varrho \subseteq A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ má podle předchozí definice tvar:

$$\begin{aligned} \eta \circ \varrho = \ \{ \ & (a, \mathcal{Q}) \in A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \\ & (\exists X \in \mathcal{P}(A))(a \in X \ \& \ X \in \mathcal{Q})\}, \end{aligned}$$

což podle definice sjednocení $\bigcup \mathcal{Q}$ znamená, že tato relace je dána předpisem:

$$\eta \circ \varrho = \{(a, \mathcal{Q}) \in A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid a \in \bigcup \mathcal{Q}\}.$$

Vlastnosti skládání relací

Skládání relací je asociativní:

Vlastnosti skládání relací

Skládání relací je asociativní:

Tvrzení. Nechť A, B, C, D jsou množiny a nechť $\varrho \subseteq A \times B$, $\eta \subseteq B \times C$, $\mu \subseteq C \times D$ jsou relace. Pak platí:

$$(\mu \circ \eta) \circ \varrho = \mu \circ (\eta \circ \varrho).$$

Inverzní relace I

Ke každé relaci ϱ mezi množinami A a B definujeme **inverzní relaci** ϱ^{-1} mezi množinami B a A následovně:

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \,|\, a\,\varrho\,b\}.$$

Inverzní relace I

Ke každé relaci ϱ mezi množinami A a B definujeme **inverzní relaci** ϱ^{-1} mezi množinami B a A následovně:

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \,|\, a \,\varrho\, b\}.$$

To znamená, že platí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \,\varrho\, b \iff b \,\varrho^{-1} a).$$

Inverzní relace I

Ke každé relaci ϱ mezi množinami A a B definujeme **inverzní relaci** ϱ^{-1} mezi množinami B a A následovně:

$$\varrho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \,|\, a \,\varrho\, b\}.$$

To znamená, že platí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \,\varrho\, b \iff b \,\varrho^{-1} a).$$

Tedy $\mathrm{Dom}\, \varrho^{-1} = \mathrm{Im}\, \varrho$, $\mathrm{Im}\, \varrho^{-1} = \mathrm{Dom}\, \varrho$ a $(\varrho^{-1})^{-1} = \varrho$.

Inverzní relace II

Mezi skládáním relací a inverzními relacemi existuje následující souvislost:

Inverzní relace II

Mezi skládáním relací a inverzními relacemi existuje následující souvislost:

Tvrzení. Nechť A, B, C jsou množiny a nechť $\varrho \subseteq A \times B$, $\eta \subseteq B \times C$ jsou relace. Pak platí:

$$(\eta \circ \varrho)^{-1} = \varrho^{-1} \circ \eta^{-1}.$$

Mohutnost množin

Řekneme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní**, anebo též že mají **stejnou mohutnost**, jestliže existuje bijekce $f : A \to B$. Pak píšeme $A \cong B$.

Mohutnost množin

Řekneme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní**, anebo též že mají **stejnou mohutnost**, jestliže existuje bijekce $f : A \to B$. Pak píšeme $A \cong B$.

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí:

$$(A \times B)^C \cong A^C \times B^C,$$
$$(A^B)^C \cong A^{B \times C}.$$

Charakteristické zobrazení

Připomeňme, že $2 = \{0, 1\}$. Pro libovolnou množinu A a pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq A$ definujme **charakteristické zobrazení** $\chi_Y : A \to 2$ podmnožiny Y následovně.

Charakteristické zobrazení

Připomeňme, že $2 = \{0, 1\}$. Pro libovolnou množinu A a pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq A$ definujme **charakteristické zobrazení** $\chi_Y : A \to 2$ podmnožiny Y následovně.

Pro libovolné $a \in A$ klademe

$$\chi_Y(a) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \in Y, \\ 0 & \text{pokud } a \notin Y. \end{cases}$$

Charakteristické zobrazení

Připomeňme, že $2 = \{0, 1\}$. Pro libovolnou množinu A a pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq A$ definujme **charakteristické zobrazení** $\chi_Y : A \to 2$ podmnožiny Y následovně.

Pro libovolné $a \in A$ klademe

$$\chi_Y(a) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \in Y, \\ 0 & \text{pokud } a \notin Y. \end{cases}$$

Tvrzení. Pro libovolnou množinu A je $\mathcal{P}(A) \cong 2^A$.

Cantorova věta

Zásadní význam má následující **Cantorova věta**.

Cantorova věta

Zásadní význam má následující **Cantorova věta**.

Věta. Pro každou množinu A platí $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

Cantorova věta

Zásadní význam má následující **Cantorova věta**.

Věta. Pro každou množinu A platí $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.
Nástin důkazu. Připusťme, že existuje bijekce $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Cantorova věta

Zásadní význam má následující **Cantorova věta**.

Věta. Pro každou množinu A platí $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.
Nástin důkazu. Připusťme, že existuje bijekce $f : A \to \mathcal{P}(A)$.
Zvolíme množinu $Y = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$.

Cantorova věta

Zásadní význam má následující **Cantorova věta**.

Věta. Pro každou množinu A platí $A \not\cong \mathcal{P}(A)$.
Nástin důkazu. Připusťme, že existuje bijekce $f : A \to \mathcal{P}(A)$.
Zvolíme množinu $Y = \{a \in A \,|\, a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$.
$Y = f(y)$ pro jediné $y \in A$.

Cantorova věta

Zásadní význam má následující **Cantorova věta**.

Věta. Pro každou množinu A platí $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.
Nástin důkazu. Připusťme, že existuje bijekce $f : A \to \mathcal{P}(A)$.
Zvolíme množinu $Y = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$.
$Y = f(y)$ pro jediné $y \in A$.
$y \in Y$ implikuje $y \notin f(y) = Y$

a $y \notin Y$ implikuje $y \in f(y) = Y$ – SPOR!

Spočetné množiny

Připomeňme, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost, právě když mají stejný počet prvků.

Spočetné množiny

Připomeňme, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost, právě když mají stejný počet prvků.

Řekneme, že daná množina je **spočetná**, jestliže má stejnou mohutnost jako množina ω všech nezáporných celých čísel.

Spočetné množiny

Připomeňme, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost, právě když mají stejný počet prvků.

Řekneme, že daná množina je **spočetná**, jestliže má stejnou mohutnost jako množina ω všech nezáporných celých čísel.

Každá podmnožina spočetné množiny je konečná nebo spočetná.

Spočetné množiny

Připomeňme, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost, právě když mají stejný počet prvků.

Řekneme, že daná množina je **spočetná**, jestliže má stejnou mohutnost jako množina ω všech nezáporných celých čísel.

Každá podmnožina spočetné množiny je konečná nebo spočetná.

Množiny $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ všech přirozených, celých a racionálních čísel jsou všechny spočetné.

Nespočetné množiny

Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Nespočetné množiny

Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Z Cantorovy věty plyne, že například množina 2^ω je nespočetná.

Nespočetné množiny

Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Z Cantorovy věty plyne, že například množina 2^ω je nespočetná.

Lze ukázat, že množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná. Přesněji je možné ukázat, že množiny $\mathbb{R}$ a 2^ω mají stejnou mohutnost.

Nespočetné množiny

Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Z Cantorovy věty plyne, že například množina 2^ω je nespočetná.

Lze ukázat, že množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná. Přesněji je možné ukázat, že množiny $\mathbb{R}$ a 2^ω mají stejnou mohutnost.

O množinách, které mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$, říkáme, že mají **mohutnost kontinua**.