Variace a kombinace

Shrneme základní poznatky z kombinatoriky. Výchozí kombinatorickou funkcí je **faktoriál**, který je pro každé číslo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definován předpisem:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (n-1) \cdot n & \text{pro } n > 0. \end{cases}$$

Další základní kombinatorickou funkcí je **binomický koeficient**, nebo též **kombinační číslo**, definované pro každá dvě čísla $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $k \leq n$ předpisem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \,.$$

Všimněme si, že pak pro libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

a dále pro libovolná $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $k \leq n$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \,.$$

Následující fakt lze považovat za rekurentní formuli pro binomické koeficienty.

Tvrzení. Pro libovolná $n, k \in \mathbb{N}$ splňující $k < n$ platí

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Důkaz. Postupně dostáváme

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!}$$
$$= \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \,.$$

Následuje **binomická věta**.

Věta. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Důkaz. Postupujeme indukcí vzhledem k n. Pro $n = 1$ není co dokazovat. Nechť dále $n > 1$. Podle indukčního předpokladu pro $n - 1$ máme

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k-1}.$$

Odtud pak s využitím předchozí rekurentní formule pro binomické koeficienty dostáváme

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)^{n-1} \cdot (x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k-1} \right) \cdot (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) x^k y^{n-k} + y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.
\end{aligned}$$

Důsledky. Pro libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n > 0. \end{cases}$$

Důkaz. Pro $n = 0$ jsou obě rovnosti zřejmé a pro $n > 0$ plynou z binomické věty v prvním případě pro $x = y = 1$ a ve druhém případě pro $x = -1$ a $y = 1$.

Obecnější kombinatorickou funkcí je **polynomický koeficient**. Pro libovolná $\ell \in \mathbb{N}$ a $n, k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$ je tento koeficient definován předpisem:

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!}.$$

Následuje rekurentní formule pro polynomické koeficienty.

Tvrzení. Pro libovolná $\ell \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ a $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$ platí

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \sum \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j - 1, k_{j+1}, \ldots, k_\ell},$$

kde suma je přes všechna $j = 1, \ldots, \ell$ taková, že $k_j \in \mathbb{N}$.

Důkaz je veden obdobným způsobem jako důkaz výše uvedené rekurentní formule pro binomické koeficienty.

Následující věta je zobecněním binomické věty.

Věta. Pro libovolné $\ell \in \mathbb{N}$, libovolná $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x_1 + \cdots + x_\ell)^n = \sum \binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} x_1^{k_1} \ldots x_\ell^{k_\ell},$$

kde suma je přes všechny uspořádané ℓ-tice $(k_1, \ldots, k_\ell)$ čísel z $\mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$.

Důkaz je podobný důkazu binomické věty s tím rozdílem, že nyní je využita předchozí rekurentní formule pro polynomické koeficienty.

Důsledek. Pro libovolné $\ell \in \mathbb{N}$ a libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\sum \binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \ell^n,$$

kde suma je přes všechny uspořádané ℓ-tice $(k_1, \ldots, k_\ell)$ čísel z $\mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $n = k_1 + \cdots + k_l$.

Důkaz. Pro $n = 0$ je tato rovnost zřejmá a pro $n > 0$ plyne z předchozí věty pro $x_1 = \cdots = x_\ell = 1$.

Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ splňují $k \leq n$ a nechť S je n-prvková množina. Pak **variace k-té třídy** v množině S jsou libovolné uspořádané k-tice

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

vzájemně různých prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$. Takovou uspořádanou k-tici můžeme vnímat také jako prosté zobrazení množiny $\{1, \ldots, k\}$ do množiny S, které každému číslu $i \in \{1, \ldots, k\}$ přiřazuje prvek $a_i \in S$. Takové zobrazení je možno přehledně zapsat například ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix}.$$

Tato zobrazení je ovšem možno uvažovat i pro $k = 0$, v tom případě se jedná o jediné, totiž prázdné zobrazení, a v takovém případě je možno připustit i $n = 0$, tedy prázdnou množinu S.

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Pak počet všech variací k-té třídy v n-prvkové množině S je roven číslu

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Důkaz. Pro $k = 0$ je tvrzení jasné a pro $n, k \in \mathbb{N}$ je třeba si uvědomit, že $\frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak variace n-té třídy v n-prvkové množině S se nazývají **permutace** množiny S.

Důsledek. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak počet všech permutací n-prvkové množiny S je roven číslu $n!$.

Nechť dále $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $k \in \mathbb{N}$ jsou libovolná čísla a nechť S je n-prvková množina. Uvažujeme-li nyní zcela libovolné uspořádané k-tice prvků množiny S, tedy libovolné prvky kartézské mocniny S^k, dostáváme **variace k-té třídy** v množině S **s opakováním**. Takové uspořádané k-tice lze ovšem podobným způsobem jako výše nyní vnímat jako zcela libovolná zobrazení množiny $\{1, \ldots, k\}$ do množiny S. Tato zobrazení lze ovšem zase uvažovat i pro $k = 0$ a v tom případě jde opět o jediné, totiž prázdné zobrazení.

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak počet všech variací k-té třídy v n-prvkové množině S s opakováním je roven číslu n^k.

Poznámka. Aby toto tvrzení platilo i pro $n = k = 0$, je třeba klást $0^0 = 1$.

Nechť nyní $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$ a nechť S je n-prvková množina. Pak **kombinace k-té třídy** v množině S jsou libovolné k-prvkové podmnožiny $T \subseteq S$. Poznamenejme, že tyto k-prvkové podmnožiny lze jednoznačně popsat pomocí jejich tzv. **charakteristických zobrazení**. Jde o libovolná zobrazení $f : S \to \{0, 1\}$ splňující podmínku $\sum_{a \in S} f(a) = k$. Přitom podmnožina $T \subseteq S$ je popsána zobrazením $f : S \to \{0, 1\}$, které je dáno předpisem:

$$(\forall a \in S)(f(a) = 1 \iff a \in T).$$

Tvrzení. Nechť $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k \leq n$. Pak počet všech kombinací k-té třídy v n-prvkové množině S je roven číslu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} .$$

Důkaz plyne ihned z předminulého tvrzení této kapitoly a z jeho důsledku. Stačí totiž uvážit, kolik existuje permutací k-prvkové podmnožiny $T \subseteq S$. Tyto permutace nejsou ovšem ničím jiným, než variacemi k-té třídy v n-prvkové množině S.

Nechť dále $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jsou libovolná čísla a nechť S je n-prvková množina. Vedeni předchozím popisem obyčejných kombinací k-té třídy v množině S prostřednictvím jejich charakteristických zobrazení, definujeme nyní **kombinace k-té třídy** v množině S **s opakováním** jakožto libovolná zobrazení $g : S \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující podmínku $\sum_{a \in S} g(a) = k$. Takové zobrazení lze interpretovat jako popis souboru k prvků vybraných z množiny S, v němž se některé prvky mohou vyskytovat opakovaně. Zmíněný popis spočívá v tom, že pro každý prvek $a \in S$ udává číslo $g(a)$ počet výskytů prvku a v daném souboru, tedy v dané kombinaci s opakováním.

Tvrzení. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak počet všech kombinací k-té třídy v n-prvkové množině S s opakováním je roven číslu

$$\binom{n+k-1}{k} .$$

Důkaz. Očíslujme prvky množiny S, takže můžeme psát $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Pak lze kombinace k-té třídy v množině S s opakováním jednoznačně zadávat pomocí posloupností nul a jedniček obsahujících k jedniček a $n-1$ nul následujícím způsobem. Uvažme libovolnou takovou posloupnost. V této posloupnosti jednotlivé nuly rozdělují jedničky do n skupin: skupina před první nulou, skupina mezi první a druhou nulou, atd., až skupina za poslední nulou. Některé tyto skupiny ovšem mohou být i prázdné. Přiřaďme nyní této poslounosti kombinaci k-té třídy v množině S s opakováním, která obsahuje tolik prvků a_1, kolik je jedniček v první skupině, tolik prvků a_2, kolik je jedniček ve druhé skupině, atd., až nakonec tolik prvků a_n, kolik je jedniček v poslední skupině. Je tedy počet uvažovaných kombinací s opakováním roven počtu výše popsaných posloupností nul a jedniček. Zadat takovou posloupnost ovšem znamená určit, na kterých k pozicích v této posloupnosti budou stát jedničky. Je tedy třeba zadat podmnožinu obsahující k pozic z celkového počtu $n+k-1$ pozic. Podle tvrzení o počtu obyčejných kombinací k-té třídy je tento počet roven shora uvedenému číslu.

Závěrem nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a nechť $\ell \in \mathbb{N}$. Nechť U je ℓ-prvková množina. Vypišme ji ve tvaru $U = \{b_1, b_2, \ldots, b_\ell\}$. Uvažme libovolnou kombinaci n-té třídy v množině U s opakováním chápanou jako soubor n prvků vybraných z množiny U, v němž se některé prvky vyskytují opakovaně. Nechť k_1 je počet výskytů prvku b_1, nechť k_2 je počet výskytů prvku b_2, atd., až k_ℓ je počet výskytů prvku b_ℓ v tomto souboru. Pak tedy platí $k_1 + \cdots + k_\ell = n$. V této situaci vzniká otázka, kolika navzájem odlišitelnými způsoby lze takový soubor vypsat ve tvaru posloupnosti prvků. Takovým posloupnostem se pak říká **permutace s opakováním**. Lze je zapisovat také jako uspořádané n-tice prvků z U, v nichž se prvek b_1 objevuje k_1-krát, prvek b_2 se objevuje k_2-krát, atd., až prvek b_ℓ se objevuje k_ℓ-krát.

Tvrzení. Nechť $\ell \in \mathbb{N}$, nechť $U = \{b_1, \ldots, b_\ell\}$ je ℓ-prvková množina a nechť $n, k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňují $k_1 + \cdots + k_\ell = n$. Pak počet příslušných permutací s opakováním v množině U je roven číslu

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_\ell} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!}.$$

Důkaz. Lze použít indukci vzhledem k ℓ. Pro $\ell = 1$ je toto tvrzení zřejmé. Nechť tedy dále $\ell > 1$. Vezměme libovolnou permutaci s opakováním uvažovaného typu v množině U chápanou jako uspořádanou n-tici prvků. Vyjmeme-li z ní všechny výskyty prvku b_ℓ, dostaneme permutaci s opakováním v množině $U-\{b_\ell\}$. Podle indukčního předpokladu je počet takovýchto permutací s opakováním roven číslu $\binom{n-k_\ell}{k_1,\ldots,k_{\ell-1}}$. Přitom k rekonstrukci původní permutace s opakováním je třeba znát, na kterých k_ℓ pozicích v původní uspořádané n-tici stál prvek b_ℓ. Volbu těchto pozic je podle tvrzení o počtu kombinací, tentokrát k_ℓ-té třídy v n-prvkové množině, možno provést $\binom{n}{k_\ell}$ způsoby. Odtud plyne, že pak celkový počet všech původně uvažovaných permutací s opakováním je roven číslu

$$\binom{n}{k_\ell} \cdot \binom{n-k_\ell}{k_1,\ldots,k_{\ell-1}} = \frac{n!}{k_\ell!\cdot(n-k_\ell)!} \cdot \frac{(n-k_\ell)!}{k_1!\cdot\ \ldots\ \cdot k_{\ell-1}!}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot\ \ldots\ \cdot k_\ell!} = \binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell}.$$