Množiny

Množinou rozumíme každý soubor určitých objektů shrnutých v jeden celek. Zmíněné objekty pak nazýváme prvky dané množiny. Pojem „množina” je tedy synonymem pojmů typu „soubor”, „souhrn”, apod.

Tento pohled na množiny má svá úskalí; doveden do důsledků, vedl by až k jevům, které nazýváme paradoxy teorie množin. Ovšem pro většinu aplikací je toto intuitivní chápání množin plně postačující.

Je-li objekt x prvkem množiny A, píšeme $x \in A$, není-li tomu tak, píšeme $x \notin A$.

Množina je tedy plně určena svými prvky. To znamená, že dvě množiny A, B považujeme za stejné, právě když jsou tvořeny stejnými prvky. Jinak řečeno, klademe $A = B$ právě když pro každý objekt x platí, že x je prvkem A tehdy a jen tehdy, když x je prvkem B. Zapsáno formulí, máme

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B).$$

Řekneme, že množina A je **podmnožinou** množiny B, jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B. Pak píšeme $A \subseteq B$ a mluvíme o **inkluzi** množin. Podrobněji řečeno, klademe $A \subseteq B$ právě když pro každý objekt x platí, že je-li x prvkem A, pak x je také prvkem B. Zapsáno formulí, máme tedy

$$A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \implies x \in B).$$

To také znamená, že máme

$$A = B \iff (A \subseteq B \ \&\ B \subseteq A).$$

Je jasné, že pak pro libovolné množiny A, B, C platí

$$(A \subseteq B \ \&\ B \subseteq C) \implies A \subseteq C.$$

Poznamenejme ještě, že místo $A \subseteq B$ se někdy píše také $B \supseteq A$, a platí-li současně $A \subseteq B$ a $A \neq B$, bývá to krátce zapisováno ve tvaru $A \subset B$.

Význačnou množinou je **prázdná množina**, tedy množina, která neobsahuje žádný prvek. Značíme ji $\emptyset$. V této souvislosti dodejme, že pro libovolnou množinu A máme

$$A \subseteq A \qquad \text{a} \qquad \emptyset \subseteq A.$$

Množina A se nazývá **konečná**, obsahuje-li pouze konečně mnoho různých prvků; v opačném případě je A **nekonečná** množina.

Pro libovolné dvě množiny A, B definujeme jejich **sjednocení** $A \cup B$ jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou prvky buď množiny A nebo množiny B, tedy těmi prvky, které jsou prvky alespoň jedné z množin A, B. To znamená, že klademe

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Dále definujeme **průnik** $A \cap B$ těchto množin jako množinu, která je tvořena těmi prvky, které jsou současně prvky množiny A i množiny B. To znamená, že klademe

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}.$$

Říkáme, že množiny A, B jsou **disjunktní**, je-li $A \cap B = \emptyset$. Konečně definujeme **rozdíl** $A - B$ množin A, B jako množinu těch prvků množiny A, které nejsou prvky množiny B. To znamená, že klademe

$$A - B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \notin B\}.$$

Platí řada množinových rovností, z nichž pozornost zasluhují zejména následující.

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí

$$\left.\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}\right\} \quad \text{(komutativita)}$$

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)
\end{aligned}
\qquad \text{(asociativita)}
$$

$$
\begin{aligned}
A \cup A &= A \\
A \cap A &= A
\end{aligned}
\qquad \text{(idempotence)}
$$

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
\qquad \text{(distributivita)}
$$

$$
\begin{aligned}
A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C) \\
A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C)
\end{aligned}
\qquad \text{(de Morganova pravidla)}
$$

Důkaz. Komutativita, asociativita a idempotence jsou zřejmé. Také ověření zbývajících rovností je snadné. Dokážeme například první z de Morganových pravidel. Ověříme následující dvě inkluze:

$A - (B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (A - C)$:
Nechť $x \in A - (B \cap C)$. Pak $x \in A \;\&\; x \notin B \cap C$. Pak tedy $x \in A \;\&\; (x \notin B \vee x \notin C)$. Pak $(x \in A \;\&\; x \notin B) \vee (x \in A \;\&\; x \notin C)$. Pak ovšem $x \in A - B \vee x \in A - C$. Takže $x \in (A - B) \cup (A - C)$.

$(A - B) \cup (A - C) \subseteq A - (B \cap C)$:
Nechť $x \in (A - B) \cup (A - C)$. Pak $x \in A - B \vee x \in A - C$. Pak tedy $(x \in A \;\&\; x \notin B) \vee (x \in A \;\&\; x \notin C)$. To znamená, že $x \in A \;\&\; (x \notin B \vee x \notin C)$. Takže pak $x \in A \;\&\; x \notin B \cap C$. Tedy $x \in A - (B \cap C)$.

Důkazy ostatních rovností jsou obdobné.

Platí řada jiných rovností, například následující.

Tvrzení. Pro libovolné množiny A, B, C platí

$$
\begin{aligned}
A - B &= A - (A \cap B) \\
A - (B \cup C) &= (A - B) - C \\
A - (B - C) &= (A - B) \cup (A \cap C) \\
A \cap (B - C) &= (A \cap B) - C
\end{aligned}
$$

Důkaz všech rovností je podobný.

Obecněji buď I libovolná množina. Dále nechť pro každé $i \in I$ je A_i nějaká množina. To znamená, že máme celý soubor množin A_i pro všechna $i \in I$. Říkáme, že I je indexová množina tohoto souboru. Pak **sjednocení** tohoto souboru množin definujeme jako množinu

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)(x \in A_i)\},$$

tedy jako množinu všech těch prvků, které jsou prvky alespoň jedné z množin A_i uvedeného souboru. Je-li $I \neq \emptyset$, pak definujeme také **průnik** tohoto souboru množin jakožto množinu

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)(x \in A_i)\},$$

tedy jako množinu všech těch prvků, které jsou prvky každé z množin A_i uvedeného souboru. Pro $I = \emptyset$ není tento průnik definován. V této souvislosti dále říkáme, že množiny zmíněného souboru jsou **vzájemně disjunktní**, jestliže pro každá $i, j \in I$, $i \neq j$, platí $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Platí analogie předchozích rovností:

Tvrzení. Pro libovolnou množinu A, pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor množin B_i, kde $i \in I$, platí

$$\left.\begin{aligned} A \cup \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) &= \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \\ A \cap \Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) &= \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \end{aligned}\right\} \quad \text{(distributivita)}$$

$$\left.\begin{aligned} A - \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) &= \bigcup_{i \in I} (A - B_i) \\ A - \Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) &= \bigcap_{i \in I} (A - B_i) \end{aligned}\right\} \quad \text{(de Morganova pravidla)}$$

Důkaz je analogický jako pro soubory dvou množin.

Někdy se nacházíme v situaci, že všechny uvažované množiny jsou podmnožinami nějaké základní množiny M. Pak pro libovolnou množinu $A \subseteq M$ množinu $M - A$ značíme krátce A' a nazýváme ji **doplněk** množiny A v množině M. Všimněme si, že pak pro libovolnou množinu $A \subseteq M$ platí například

$$A \cup A' = M, \quad A \cap A' = \emptyset \quad \text{a} \quad A'' = A.$$

Je-li I indexová množina a jsou-li $A_i \subseteq M$ jakékoliv podmnožiny pro všechna $i \in I$, pak v dané situaci je možno modifikovat definici průniku souboru množin A_i pro $i \in I$ předpisem

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in M \mid (\forall i \in I)(x \in A_i)\},$$

tedy jako množinu všech těch prvků z M, které jsou prvky každé z množin A_i uvedeného souboru. Pak ovšem je tento průnik definován i tehdy, je-li $I = \emptyset$, a v tom případě je roven celé množině M. Pro $I \neq \emptyset$ je tato definice shodná s definicí předchozí. Dále z de Morganových pravidel pro libovolný soubor podmnožin $A_i \subseteq M$, kde $i \in I$, plyne

$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$$
$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$$

a tyto rovnosti platí i v případě, že $I = \emptyset$.

K libovolné množině A vytvořme množinu

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\},$$

tedy množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny ty množiny, které jsou podmnožinami množiny A. Tuto množinu nazýváme **množinou všech podmnožin** množiny A, nebo též **potenční množinou** množiny A.

Konstrukci potenční množiny lze iterovat. Všimněme si například, že

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\},\\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \quad \text{atd.}\end{aligned}$$

Teorie množin bývá někdy stavěna na představě, že neexistují žádné jiné objekty, než jenom množiny. Tedy prvky množin mohou být zase jen množiny. Všechny ostatní typy objektů je tedy třeba „vytvořit" z množin. Ilustrujeme to na množině

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

všech nezáporných celých čísel. Prvky této množiny mají být zase množiny. Definujeme tedy čísla

$$0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

indukcí jako množiny následovně. Klademe

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots,$$

tedy pro každé $n > 1$ klademe

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Všimněme si mimochodem, že pak pro každá $m, n \in \omega$ máme $m < n$ právě tehdy, když $m \in n$.