Při konstrukci nezáporných celých čísel jsme měli $2 = \{0, 1\}$. Pro libovolnou množinu A je tedy 2^A množinou všech zobrazení $f : A \to \{0, 1\}$. Dále pro množinu A a pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq A$ definujeme **charakteristické zobrazení** $\chi_Y : A \to \{0, 1\}$ podmnožiny Y následovně. Pro libovolné $a \in A$ klademe

$$\chi_Y(a) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \in Y, \\ 0 & \text{pokud } a \notin Y. \end{cases}$$

Nyní jsme připraveni dokázat následující fakt.

Tvrzení. Pro libovolnou množinu A je $\mathcal{P}(A) \cong 2^A$.

Důkaz. Zobrazení

$$\vartheta : \mathcal{P}(A) \to 2^A$$

definované pro každou podmnožinu $Y \subseteq A$ předpisem

$$\vartheta(Y) = \chi_Y$$

je zřejmě bijekce množiny $\mathcal{P}(A)$ na množinu 2^A.

Zásadní význam má následující **Cantorova věta**.

Věta. Pro každou množinu A platí $A \ncong \mathcal{P}(A)$.

Důkaz. Připusťme, že existuje bijekce

$$f : A \to \mathcal{P}(A).$$

Uvažujme množinu

$$Y = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Pak $Y \subseteq A$, čili $Y \in \mathcal{P}(A)$. Poněvadž f je podle předpokladu bijekce, existuje jediné $y \in A$, pro něž $Y = f(y)$.

Zkoumejme nyní, zda $y \in Y$ či nikoliv. Pokud $y \in Y$, pak z definice množiny Y plyne, že $y \notin f(y)$, a poněvadž $f(y) = Y$, znamená to, že $y \notin Y$, což není možné. Pokud však $y \notin Y$, pak zase z definice množiny Y plyne, že $y \in f(y)$, a poněvadž $f(y) = Y$, znamená to tentokrát, že $y \in Y$, což opět není možné. To dává spor.

Řekneme, že daná množina A je **spočetná**, jestliže A je ekvivalentní množině

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

všech nezáporných celých čísel. Názorně řečeno, množina A je spočetná, je-li možno všechny její prvky očislovat nezápornými celými čísly, tedy je-li možno všechny prvky množiny A seřadit do nekonečné posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Příklad. Množina

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

všech přirozených čísel je spočetná. Skutečně zobrazení

$$\gamma : \omega \to \mathbb{N}$$

dané předpisem

$$(\forall k \in \omega)(\gamma(k) = k + 1)$$

je bijekcí množiny ω na množinu $\mathbb{N}$.

Příklad. Množina

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

všech celých čísel je spočetná. Skutečně zobrazení

$$\delta : \omega \to \mathbb{Z}$$

dané předpisem

$$(\forall \ell \in \omega) \left(\delta(\ell) = \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{je-li } \ell \text{ sudé,} \\ -\frac{\ell+1}{2} & \text{je-li } \ell \text{ liché} \end{cases} \right)$$

je bijekcí množiny ω na množinu $\mathbb{Z}$. Názorně předvedeno, znamená to, že jsme seřadili všechna celá čísla do nekonečné posloupnosti $0, -1, 1, -2, 2, \dots, -n, n, \dots$.

Tvrzení. Každá podmnožina Y spočetné množiny A je konečná nebo spočetná.

Důkaz. Poněvadž A je spočetná množina, je možno všechny její prvky seřadit do nekonečné posloupnosti

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots .$$

Není-li podmnožina $Y \subseteq A$ konečná, tvoří její prvky v uvedené posloupnosti nekonečnou podposloupnost

$$a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, \dots ,$$

kde $i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \dots$. Poněvadž je možno takto prvky množiny Y očíslovat nezápornými celými čísly, tedy čísly z ω, je v tomto případě množina Y spočetná.

Tvrzení. Kartézský součin $A \times B$ dvou spočetných množin A, B je spočetná množina.

Důkaz. Poněvadž obě množiny A, B jsou ekvivalentní množině ω všech nezáporných celých čísel, stačí ukázat, že kartézský čtverec $\omega \times \omega$ je spočetná množina. Ovšem

$$\omega \times \omega = \{(k, \ell) \mid k, \ell \in \omega\}.$$

Pro každou uspořádanou dvojici $(k, \ell) \in \omega \times \omega$ nazvěme výškou této uspořádané dvojice součet $k + \ell$. Pak je jasné, že pro každé číslo $h \in \omega$ existuje právě $h + 1$ uspořádaných dvojic

$$(0, h), (1, h-1), (2, h-2), \dots, (h-1, 1), (h, 0)$$

výšky h v kartézském čtverci $\omega \times \omega$. Vypišme nyní podle rostoucí výšky za sebou tímto způsobem všechny uspořádané dvojice z $\omega \times \omega$. Očíslujeme-li nyní takto seřazené uspořádané dvojice z $\omega \times \omega$ nezápornými celými čísly, tedy čísly z ω, dostaneme tak bijekci množiny ω na množinu $\omega \times \omega$. Jsou tedy tyto dvě množiny ekvivalentní, takže $\omega \times \omega$ je spočetná množina.

Důsledek. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

Důkaz. Každé racionální číslo lze jednoznačně zadat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ a čísla p a q jsou navzájem nesoudělná. Racionální čísla tedy vzájemně jednoznačně odpovídají těm uspořádaným dvojicím $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, které pozůstávají ze vzájemně nesoudělných čísel. Tyto uspořádané dvojice tvoří nekonečnou podmnožinu množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Množiny $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$ jsou spočetné, takže podle předchozích tvrzení je spočetný také jejich kartézský součin $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ i každá jeho nekonečná podmnožina. To znamená, že i množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

Nekonečná množina, jež není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Tvrzení. Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je nespočetná.

Důkaz. Připusťme, že by množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel byla spočetná. Tedy by bylo možno všechna reálná čísla seřadit do nekonečné posloupnosti

$$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots .$$

Každé reálné číslo je možno jediným způsobem zadat jeho dekadickým rozvojem včetně znaménka, vyloučíme-li ty dekadické rozvoje, v nichž se od jistého místa dále vyskytují jen samé cifry 9. Definujme nyní reálné číslo s ležící v intervalu $(0, 1)$ jeho dekadickým rozvojem

$$s = 0, s_0 s_1 s_2 \ldots s_n \ldots ,$$

kde $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ jsou cifry zadané následujícím způsobem:

$$(\forall i \in \omega) \left(s_i = \begin{cases} 1 & \text{je-li } (i+1)\text{-ní cifra za desetinnou čárkou} \\ & \text{v dekadickém rozvoji čísla } r_i \text{ různá od } 1, \\ 2 & \text{je-li } (i+1)\text{-ní cifra za desetinnou čárkou} \\ & \text{v dekadickém rozvoji čísla } r_i \text{ rovna } 1. \end{cases} \right)$$

Pak je jasné, že číslo s se liší ode všech čísel $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. To je spor s předpokladem, že $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ byla všechna reálná čísla. Je tedy množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel nespočetná.