Svazy

Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina. Prvek $a \in A$ se nazývá **dolní závora** množiny B, jestliže pro každý prvek $b \in B$ platí $a \leq b$. Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá **zdola ohraničená**, má-li alespoň jednu dolní závoru v $(A, \leq)$. Duálními pojmy k těmto pojmům jsou **horní závora** podmnožiny B a **shora ohraničená** podmnožina B. To opět znamená, že prvek $a \in A$ je horní závorou množiny B v $(A, \leq)$ právě tehdy, když tento prvek je dolní závorou množiny B v duálně uspořádané množině $(A, \geq)$, a podmnožina B je shora ohraničená v $(A, \leq)$ právě tehdy, když je zdola ohraničená v $(A, \geq)$.

Buď opět $(A, \leq)$ uspořádaná množina a $B \subseteq A$ podmnožina. Prvek $a \in A$ se nazývá **infimum** množiny B, jestliže

a je dolní závora množiny B a přitom
pro každou dolní závoru $c \in A$ množiny B platí $c \leq a$.

To znamená, že takový prvek a je největší dolní závorou množiny B. Je tedy infimum množiny B, pokud existuje, určeno jednoznačně a značí se symbolem $\inf B$. Duálním pojmem k tomuto pojmu je **supremum** množiny B a značí se symbolem $\sup B$.

Příklad. V uspořádané množině $(\mathbb{N}, \mid)$ má každá neprázdná konečná podmnožina $M \subseteq \mathbb{N}$ supremum $\sup M$ – je jím nejmenší společný násobek čísel obsažených v M. Pro prázdnou množinu $\emptyset$ jakožto podmnožinu v $\mathbb{N}$ pak platí $\sup \emptyset = 1$. Žádná nekonečná podmnožina $M \subseteq \mathbb{N}$ zde ovšem nemá horní závoru a tedy ani supremum, neboť každé číslo $m \in \mathbb{N}$ má jen konečný počet přirozených dělitelů.

Příklad. Buď A nekonečná množina. Označme $\mathcal{F}(A)$ množinu všech těch podmnožin $X \subseteq A$, pro něž jedna z množin X, $A - X$ je konečná. Je-li nyní $Y \subseteq A$ taková podmnožina, že obě množiny Y, $A - Y$ jsou nekonečné, pak množina jednoprvkových množin $\{\{y\} \mid y \in Y\}$ je podmnožinou v $\mathcal{F}(A)$, která v uspořádané množině $(\mathcal{F}(A), \subseteq)$ nemá supremum. Má zde totiž nekonečně mnoho horních závor, z nichž ale žádná není nejmenší.

Poznámky. Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Pak $\inf A$ a $\sup \emptyset$ existují právě tehdy, když v A existuje nejmenší prvek x, a v tom případě platí $\inf A = \sup \emptyset = x$. Duální tvrzení platí pro $\sup A$ a $\inf \emptyset$. To znamená, že tyto prvky existují právě tehdy, když v A existuje největší prvek y, a v tom případě platí $\sup A = \inf \emptyset = y$.

Buď dále $B \subseteq A$ podmnožina. Existují-li prvky $\inf B$, resp. $\sup B$, pak každý z těchto prvků může, ale obecně nemusí ležet v samotné množině B. První případ nastává právě tehdy, když množina B má nejmenší, resp. největší prvek. V takovém případě právě tyto prvky představují prvky $\inf B$, resp. $\sup B$.

Uspořádaná množina $(A, \leq)$, v níž pro libovolné prvky $a, b \in A$ existují $\sup\{a, b\}$ a $\inf\{a, b\}$, se nazývá **svaz**.

Uspořádaná množina $(A, \leq)$, v níž pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ existují $\sup B$ a $\inf B$, se nazývá **úplný svaz**.

Všimněme si, že v uspořádané množině $(A, \leq)$ pro libovolné prvky $a, b \in A$ platí

$$a \leq b \iff \inf\{a, b\} = a \iff \sup\{a, b\} = b.$$

Odtud ihned plyne, že každý řetězec je svaz. Jsou ale řetězce, které nejsou úplnými svazy – například řetězec $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Příklad. Buď A množina a buď $\mathcal{P}(A)$ její potenční množina. Pak v uspořádané množině $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ libovolná podmnožina $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(A)$ má supremum i infimum a platí pro ně

$$\sup \mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}, \quad \inf \mathcal{Q} = \bigcap \mathcal{Q}.$$

(Přitom pro podmnožinu $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ zde chápeme $\bigcap \emptyset$ jako A.) Je tedy $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ úplný svaz.

Příklad. Buď A nekonečná množina. Není těžké ověřit, že pak uspořádaná množina $(\mathcal{F}(A), \subseteq)$ z předminulého příkladu je svaz, ale viděli jsme tam, že to není úplný svaz.

Příklad. Uspořádaná množina $(\mathbb{N}, |\,)$ je svaz, neboť pro každá $m, n \in \mathbb{N}$ je $\sup\{m, n\}$ nejmenší společný násobek čísel m, n a $\inf\{m, n\}$ je největší společný dělitel čísel m, n. Není zde ale největší prvek, takže nejde o úplný svaz. Podobně uspořádaná množina $(\omega, |\,)$ je svaz a lze se přesvědčit, že se jedná dokonce o úplný svaz.

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Pak pro libovolnou neprázdnou konečnou podmnožinu $B \subseteq A$ existují $\sup B$ a $\inf B$.

Důkaz. Postupujeme indukcí vzhledem k počtu prvků v B. Obsahuje-li B jeden nebo dva prvky, není co dokazovat. V indukčním kroku máme ukázat, že pro libovolnou neprázdnou konečnou podmnožinu $B \subseteq A$, $B \neq A$, pro niž $\sup B$ a $\inf B$ existují, a pro libovolný prvek $a \in A - B$ existují také $\sup(B \cup \{a\})$ a $\inf(B \cup \{a\})$. Ověříme například existenci $\sup(B \cup \{a\})$. Uvažme prvek $c = \sup\{\sup B, a\}$. Poněvadž $c \geq \sup B$ a $c \geq a$, je jasné, že c je horní závora množiny $B \cup \{a\}$. Nechť nyní d je libovolná horní závora množiny $B \cup \{a\}$. Pak $d \geq a$ a d je rovněž horní závora množiny B, odkud plyne $d \geq \sup B$. Celkem tedy $d \geq \sup\{\sup B, a\}$, čili $d \geq c$. To ukazuje, že $c = \sup(B \cup \{a\})$.

Důsledek. Každý konečný neprázdný svaz je úplný.

Často užíváme následujícího jednoduššího označení. Je-li $(A, \leq)$ svaz, pak pro libovolné prvky $a, b \in A$ prvek $\sup\{a, b\}$ značíme krátce jako $a \vee b$ a prvek $\inf\{a, b\}$ značíme krátce jako $a \wedge b$. Pak je možno formulovat následující fakt.

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ svaz. Potom pro libovolné prvky $a, b, c \in A$ platí následující rovnosti:

$$
\begin{array}{lll}
a \vee a = a & a \wedge a = a & \text{(idempotence)} \\
a \vee b = b \vee a & a \wedge b = b \wedge a & \text{(komutativita)} \\
(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) & (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) & \text{(asociativita)} \\
a \vee (a \wedge b) = a & a \wedge (a \vee b) = a & \text{(absorbce)}
\end{array}
$$

Důkaz. Idempotence a komutativita jsou zřejmé. Pokud jde o asociativitu, podobný obrat jako v předchozím důkazu ukáže, že prvky na obou stranách první rovnosti jsou rovny $\sup\{a, b, c\}$ a prvky na obou stranách druhé rovnosti jsou rovny $\inf\{a, b, c\}$. Rovněž ověření zákonů absorbce je snadné.

Význam uvedených rovností spočívá také v tom, že tyto rovnosti netoliko vyplývají z definice pojmu svazu, ale bylo by možno ukázat, že těmito rovnostmi je pojem svazu již kompletně charakterizován zhruba v tom smyslu, že by je bylo možno použít jako východisko pro jinou, ekvivalentní definici tohoto pojmu.

Tvrzení. Buď $(A, \leq)$ libovolný svaz. Pak jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

$$
\begin{array}{ll}
(*) & (\forall a, b, c \in A)(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)), \\
(**) & (\forall e, f, g \in A)(e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge (e \vee g)).
\end{array}
$$

Důkaz. Nechť platí podmínka $(*)$ a nechť $e, f, g \in A$. Pak

$$
\begin{aligned}
(e \vee f) \wedge (e \vee g) &= ((e \vee f) \wedge e) \vee ((e \vee f) \wedge g) && \text{(podle } (*)) \\
&= e \vee (g \wedge (e \vee f)) && \text{(absorbce)} \\
&= e \vee ((g \wedge e) \vee (g \wedge f)) && \text{(podle } (*)) \\
&= (e \vee (g \wedge e)) \vee (g \wedge f) && \text{(asociativita)} \\
&= e \vee (f \wedge g), && \text{(absorbce)}
\end{aligned}
$$

takže platí také podmínka $(**)$. Analogicky se ukáže, že z $(**)$ plyne $(*)$.

Svaz $(A, \leq)$ splňující kteroukoliv z podmínek $(*)$, $(**)$ uvedených v předchozím tvrzení se nazývá **distributivní**. Zmíněné tvrzení vlastně říká, že svaz $(A, \geq)$ duální k distributivnímu svazu $(A, \leq)$ je rovněž distributivní.

Všechny svazy uvedené v předchozích příkladech této kapitoly jsou distributivní. Uvidíme ale, že existují svazy, které nejsou distributivní.

Věta. Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu $B \subseteq A$ existuje $\inf B$. Pak pro libovolnou podmnožinu $C \subseteq A$ existuje také $\sup C$.

Poznámka. Uvedený předpoklad v sobě zahrnuje požadavek existence prvku $\inf \emptyset$, tedy existenci největšího prvku v $(A, \leq)$.

Důkaz. Buď $C \subseteq A$ libovolná podmnožina. Nechť D je množina všech horních závor množiny C v $(A, \leq)$. Uvažme prvek $f = \inf D$. Ukážeme, že pak $f = \sup C$. Nejprve si všimněme, že pro každý prvek $c \in C$ platí, že $c \leq d$ pro všechna $d \in D$, což znamená, že c je dolní závorou množiny D v $(A, \leq)$. Ovšem f je největší dolní závora této množiny. Nutně tedy platí $c \leq f$ pro všechna $c \in C$. To znamená, že f je horní závorou množiny C v $(A, \leq)$. Nechť dále $g \in A$ je libovolná horní závora této množiny. Pak $g \in D$, odkud plyne, že $f \leq g$. To potvrzuje, že $f = \sup C$.

Dokázaná věta vlastně říká, že uspořádaná množina $(A, \leq)$ je úplným svazem, jakmile pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ existuje $\inf B$.

Poznamenejme také, že platí rovněž věta duální k uvedené větě, tedy věta, v níž jsou prohozená suprema a infima.

Příklad. Buď A množina. Připomeňme, že symbolem $\mathcal{E}(A)$ jsme značili množinu všech ekvivalencí na A. Tyto ekvivalence jakožto relace na A, tedy jakožto podmnožiny v $A \times A$ lze porovnávat množinovou inkluzí $\subseteq$. Vzniká tak uspořádaná množina $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$. Ukážeme, že se jedná o úplný svaz. K tomu podle předchozí věty stačí ukázat, že pro libovolnou podmnožinu $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}(A)$ existuje $\inf \mathcal{G}$. Snadno se ovšem vidí, že je-li $\mathcal{G} \neq \emptyset$, pak průnik $\bigcap \mathcal{G}$ všech ekvivalencí z $\mathcal{G}$ je zase ekvivalence na A. Odtud ihned plyne, že v tom případě máme

$$\inf \mathcal{G} = \bigcap \mathcal{G}.$$

Konečně je jasné, že pro $\mathcal{G} = \emptyset$ je $\inf \emptyset = A \times A$. Je tedy opravdu $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$ úplný svaz. Poznamenejme, že má-li množina A alespoň tři prvky, jedná se současně o příklad svazu, který není distributivní.

Závěrem dokážeme následující fakt týkající se řetězce $(\mathbb{R}, \leq)$ všech reálných čísel uspořádaných obvyklým způsobem podle velikosti.

Tvrzení. Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $M \subseteq \mathbb{R}$ má infimum v $(\mathbb{R}, \leq)$. Každá neprázdná shora ohraničená podmnožina $N \subseteq \mathbb{R}$ má supremum v $(\mathbb{R}, \leq)$.

Důkaz. Poněvadž se jedná o dvě vzájemně duální tvrzení a zobrazení přiřazující každému číslu $r \in \mathbb{R}$ číslo $-r$ je izomorfismus řetězce $(\mathbb{R}, \leq)$ na duální řetězec $(\mathbb{R}, \geq)$, stačí dokázat například první z uvedených tvrzení. Použijeme k tomu reprezentaci reálných čísel pomocí řezů v $(\mathbb{Q}, \leq)$ z konce minulé kapitoly, tedy fakt, že řetězec $(\mathbb{R}, \leq)$ je izomorfní s tam popsaným řetězcem $(\mathcal{R}, \preceq)$.

Buď tedy $M \subseteq \mathbb{R}$ libovolná neprázdná zdola ohraničená podmnožina. Nechť $s \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že $s \leq r$ pro všechna $r \in M$. Nechť $\Psi \subseteq \mathcal{R}$ je množina všech řezů odpovídajících číslům z M při zmíněném izomorfismu a nechť (G, H) je řez v $\mathcal{R}$

odpovídající číslu s. Pak z toho, že $s \leq r$ pro všechna $r \in M$, plyne, že $L \subseteq H$ pro všechny řezy (K, L) v Ψ. Uvažme množinu

$$V = \bigcup_{(K,L)\in\Psi} L$$

vzniklou sjednocením množin L všech řezů (K, L) obsažených v Ψ. Pak ovšem také $V \subseteq H$. Je tedy množina V neprázdná a zdola ohraničená. Přitom tato množina nemá nejmenší prvek, neboť kdyby existoval prvek $t \in V$, který by zde byl nejmenším prvkem, bylo by $t \in L$ pro některý řez (K, L) v Ψ a t by pak byl nejmenší prvek v L, což není možné, neboť takové řezy nejsou v $\mathcal{R}$ obsaženy. Navíc je vidět, že pro každé $v \in V$ a pro každé $q \in \mathbb{Q}$ splňující $v < q$ platí také $q \in V$. Skutečně pak totiž zase $v \in L$ pro některý řez (K, L) v Ψ, odkud plyne $q \in L$. Položíme-li tedy $U = \mathbb{Q} - V$, víme podle předchozí kapitoly, že (U, V) je řez v $(\mathbb{Q}, \leq)$, a je to buď dedekindovský řez 1. druhu nebo mezera. To znamená, že (U, V) je řez v $\mathcal{R}$. Nechť $w \in \mathbb{R}$ je číslo odpovídající tomuto řezu ve shora zmiňovaném izomorfismu. Poněvadž pro každý řez (K, L) v Ψ máme $L \subseteq V$, plyne odtud, že $w \leq r$ pro všechna $r \in M$. Nechť konečně $z \in \mathbb{R}$ je jakékoliv takové číslo, že $z \leq r$ pro všechna $r \in M$. Nechť (X, Y) je řez v $\mathcal{R}$ odpovídající číslu z. Pak odtud plyne, že $L \subseteq Y$ pro všechny řezy (K, L) v Ψ. To ale celkem znamená, že $V \subseteq Y$, takže $z \leq w$. Tím je prokázáno, že $w = \inf M$.

Uvedené tvrzení je možno ještě přeformulovat následujícím způsobem. Připojme k množině $\mathbb{R}$ dva nové prvky $-\infty$ a ∞ a rozšiřme uspořádání $\leq$ z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tak, aby pro každé $r \in \mathbb{R}$ platilo $-\infty < r < \infty$. Tímto způsobem vzniká řetězec $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$. Není těžké si rozmyslet, že pak předchozí tvrzení lze převést do následují podoby.

Důsledek. Řetězec $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$ je úplný svaz.