Demonstrované cvičení, Matematika I, 20.9.2005

Příklad 1. *Množení zajíců. Na začátku jara přinesl čáp na louku dva čerstvě narozené zajíčky, samečka a samičku. Samička je schopná od dvou měsíců stáří povít každý měsíc dva malé zajíčky (samečka a samičku). Nově narození zajíci splodí potomky po jednom měsíci a pak každý další měsíc. Každá samička je březí jeden měsíc a pak opět porodí samečka a samičku. Kolik párů zajíců bude na louce po devíti měsících (pokud žádný neumře a žádný se tam „nepřistěhuje“)?*

Příklad 2a. *Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%. Mirek bych chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?*

Z přednášky víme, že n-tý člen posloupnosti $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ zadané rekurentně

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq 1$$

spočítáme jako

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r).$$

Příklad 2b. *Jak dlouho by Mirek auto splácel, kdyby chtěl měsíčně splácet 5000 Kč?*

Příklad 3. *Zjednodušený model chování národního produktu.*

$$y_{k+2} - a(1+b)y_{k+1} + aby_k = 1,$$

kde y_k je národní produkt v roce k, konstanta a je takzvaný mezní sklon ke spotřebě, což je makroekonomický ukazatel, který udává jaký zlomek peněz, které mají obyvatelé k dispozici, utratí a konstanta b popisuje jak závisí míra investic soukromého sektoru na mezním sklonu ke spotřebě.

Předpokládáme dále, že velikost národního produktu je normována tak, aby na pravé straně rovnice vyšlo číslo 1.

Spočítejte konkrétní hodnoty pro $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.

Příklad 4. *Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v množině přirozených čísel.