(Drsná) Matematika

Martin Panák, Jan Slovák

- pokus o přiměřeně náročnou přednášku pro studenty informatiky
- mozaika obrazů podstatné části matematiky
- přehled nástrojů a receptů k jejich využití
- má být dostupné pro průměrné, ale zároveň poskytnout dost prostoru i pro mimořádně zdatné

Celkem čtyři semestrální přednášky.

Nabídka:

- dvouhodinová přednáška doplněná podpůrnými materiály na IS a dvouhodinová prezentovaná řešení úloh (méně formání část přednášky)
- zadávané sestavy (povinných) úloh k procvičení spolu s podporou ve cvičeních po menších skupinách při řešení povinných úloh

Povinnosti:

- zpracovat a odevzdávat řešení každotýdenních úloh (zadání v úterý, odevzdávka nejpozději na konci cvičení v týdnu následujícím)
- absolvovat alespoň 7 cvičení – cvičení je uznáno po přiměřeném zvládnutí alespoň 60% zadaných úloh v daném termínu
- dvě písemné práce na 45 min. během semestru (každá s vahou 15% pro celkové hodnocení)
- závěrečná písemná zkouška (s vahou 70% pro celkové hodnocení)

Organizace:

- pondělní přednášky –
  většinou Jan Slovák, průběžně se na IS budou objevovat texty a další podklady
- úterní prezentovaná cvičení –
  většinou Martin Panák, budou zároveň zadány příklady k odevzdávkám
- právo a povinnost průběžné kontroly a konzultace řešených příkladů cvičícími –
  neschopnost objasnit odevzdaný příklad znamená „neabsolvované“ příslušné cvičení.

KAPITOLA 1

Úvod a motivace

„hodnota, změna, poloha“
– co to je a jak to uchopit?

1. Čísla a funkce

- Čísla přirozená – $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, často včetně nuly
- Čísla celá – $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Racionální, reálná a komplexní čísla – $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Co to je „definovat čísla“? Např. $\mathbb{N}$:

$0 := \emptyset,\ 1 := \{\emptyset\},\ 2 := \{\emptyset, 1\}, \ldots, n+1 := \{0, 1, \ldots, n\}.$

– sčítání a násobení, uspořádání, nejmenší prvky podmnožin

1.1. Vlastnosti sčítání.

(KG1) $$(a+b)+c = a+(b+c), \forall a, b, c$$

(KG2) $$a+b = b+a, \forall a, b, c$$

(KG3) $$\exists 0, \forall a,\ a+0 = a$$

(KG4) $$\forall a\ \exists(-a),\ a+(-a) = 0.$$

(KG1) – (KG4) jsou vlastnosti *komutativní grupy*.

1.2. Vlastnosti násobení.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\ a, b, c \tag{O1}$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \forall\ a, b \tag{O2}$$

$$\exists 1, \forall a,\ 1 \cdot a = a \tag{O3}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall\ a, b, c. \tag{O4}$$

Poslední vlastnosti (O4) se říká distributivita.

Množiny s operacemi $+$, $\cdot$ a vlastnostmi (KG1)–(KG4), (O1)–(O4) se nazývají *komutativní okruhy*.

Další běžná vlastnost čísel:

$$\forall a \neq 0, \exists a^{-1},\ a \cdot a^{-1} = 1. \tag{P}$$

Pokud navíc i (P), hovořme o *poli* (často také o *komutativním tělese*).

Slabší vlastnost:

$$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{buď } a = 0 \text{ nebo } b = 0. \tag{OI}$$

Hovoříme o *oboru integrity*.

Skaláry – prvky nějaké množiny s operacemi $+$ a $\cdot$ splňujícími výše takové vlastnosti.

Budeme pro ně vesměs užívat latinská písmena ze začátku abecedy.

1.3. Skalární funkce. Závislosti hodnot na jiných hodnotách – *funkce*.

Smyslem matematických úvah bývá z neformálního popisu závislostí najít explicitní formule pro funkce.

- s přesným a konečným výrazem
- s nekonečným výrazem
- s přiblížením neznámé funkce známým odhadem (většinou s vyčíslenou možnou chybou)
- s odhadem hodnot s vyčíslením jejich pravděpodobnosti
- ....

1.4. Příklady. (1) Sčítání přirozených čísel lze vidět jako operačně definovanou skalární funkci: $a + b$ je výsledek procedury, ve které k a přičítáme 1 a zároveň odebereme z b nejmenší prvek, dokud není b prázdná.

(2) *Faktoriál* definujeme vztahy

$$f(0) = 1, \; f(n+1) = (n+1) \cdot f(n).$$

Píšeme $f(n) = n!$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1.$$

2. Kombinatorické formule

1.5. Permutace, kombinace a variace. Pořadí n prvků nějaké množiny: pro volbu prvního prvku n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.

Na konečné množině S s n prvky je právě $n!$ různých pořadí – *permutace* prvků množiny S.

S ztotožníme s množinou $S = \{1, \dots, n\}$ prvních n přirozených čísel – permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n.

Tvrzení: *Počet různých pořadí na n-prvkové množině je dán známou funkcí $n!$.*

Binomická čísla vyjadřují, kolika způsoby lze vybrat k různých rozlišitelných předmětů z množiny n předmětů.

Počet *kombinací k-tého stupně* z n prvků je (samozřejmě je $k \le n$)

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Záleží i na pořadí vybrané k-tice prvků: *variace k-tého stupně.*

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \le k \le n$ (a nula jinak).

Binomický rozvoj – roznásobení n-té mocniny dvojčlenu.

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

a všimněme si, že pro odvození jsme potřebovali pouze distributivitu, komutativnost a asociativitu násobení a sčítání.

Klademe $\binom{n}{k} = 0$, kdykoliv je buď $k < 0$ nebo $k > n$.

1.6. Tvrzení. *Pro všechna přirozená čísla k a n platí*
(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(2) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
(3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
(4) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Pascalův trojúhelník – každé číslo obdržíme jako součet dvou bezprostředně nad ním ležících sousedů:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & & \\
 & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & & \\
0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\end{array}$$

V jednotlivých řádcích jsou koeficienty u jednotlivých mocnin z výrazu $(a+b)^n$, např.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

1.7. Kombinace a variace s opakováním. Volný výběr prvků z n možností, včetně pořadí – *variace k-tého stupně s opakováním*, $V(n,k)$.

Předpokládáme, že stále máme pro výběr stejně možností, např. díky tomu, že vybrané prvky před dalším výběrem vracíme nebo třeba házíme pořád stejnou kostkou.

$$V(n,k) = n^k.$$

Bez zohlednění pořadí – *kombinacích s opakováním*$C(n,k)$.

Věta. *Počet kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je pro všechny $0 \leq k$ a $0 < n$*

$$C(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

3. Diferenční rovnice

Často místo hodnoty sklaární funkce zadáváme její změnu při odpovídající změně nezávislé proměnné.

Např. $f(n) = n! = n \cdot f(n-1) = (n-1)!$.

Modely, které popisují reálné systémy v ekonomice, biologii apod.

1.8. Lineární rovnice prvního řádu. Obecná *diferenční rovnice prvního řádu*:

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích skalárů.

Volba $f(0)$ zadává jednoznačně celou nekonečnou posloupnost hodnot $f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$.

Nejjednodušší je tzv. *lineární differenční rovnice*

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde a, $b \in \mathbb{N}$.

Je-li $b = 0$, pak $f(n) = a^n f(0)$ je řešení (a tedy jediné řešení).

To je tzv. Malthusiánský model populačního růstu – za zvolený časový interval vzroste populace s konstantní úměrou a vůči předchozímu stavu.

Obecněji s proměnnými koeficienty a a b:

1.9. Věta. *Obecné řešení diferenční rovnice prvního řádu*

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n$$

s počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je dáno vztahem

$$f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b_r. \tag{1.1}$$

1.10. Důsledek. *Obecné řešení lineární diferenční rovnice s* $a \neq 1$ *a počáteční podmínkou* $f(0) = y_0$ *je*

$$f(n) = a^n y_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

1.11. Rovnice druhého řádu. *Diferenční rovnice obecného řádu* k:

$$f(n + k) = F(n, f(n), \dots, f(n + k - 1)) = 0,$$

kde F je známá skalární funkce v $k + 1$ proměnných skalárních veličinách.

Celá posloupnost hodnot $f(n)$ je jednoznačně určena volbou k-tice čísel $f(0), \dots, f(k - 1)$.

Lineární diferenční rovnice druhého řádu:

$$f(n+2) = a \cdot f(n+1) + b \cdot f(n) + c,$$

kde a, b, c jsou známé skalární koeficienty.

Dosadíme podobné řešení jako u lineárních, tj. $f(n) = \lambda^n$ pro nějaké skalární λ. Dostáváme:

$$\lambda^{n+2} - a\lambda^{n+1} - b\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - a\lambda - b) = 0.$$

Proto buď je $\lambda = 0$ nebo

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 4b}).$$

Součet dvou řešení je opět řešením rovnice, proto je obecné řešení $f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ kde zadané počáteční hodnoty $f(0)$ a $f(1)$ určí příslušné konstanty C_1 a C_2.

Příklad:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n$$
$$y_0 = 2, y_1 = 0.$$

Je tedy $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$
Chceme $y_0 = C_1 + C_2 = 2$ a $y_1 = \frac{1}{2}C_1(1+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}C_2(1-\sqrt{3})$.
To určuje konstanty: $C_1 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $C_2 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Postřehy:

- použitá metoda funguje pro obecné lineární diferenční rovnice bez absolutních členů.
- řešení ve formě kombinace mocnin kořenů tzv. charakteristického polynomu rovnice.
- nalezená řešení pro rovnice s celočíselnými koeficienty vypadají složitě a jsou vyjádřena pomocí iracionálních (případně komplexních) čísel, přestože o samotném řešení dopředu víme, že je celočíselné též.
- obecné řešení umožňuje bez přímého vyčíslování konstant diskutovat kvalitativní chování posloupnosti čísel $f(n)$,

1.12. Nelineární příklad. Rovnice prvního řádu pro Malthusiánský model populačního růstu nemůže být realistická pro delší časový interval.

Realističtější model bude mít takto úměrnou změnu populace $\delta p(n) = p(n+1) - p(n)$ jen při malých hodnotách p, tj. $\delta p/p \sim r > 0$. Při určité limitní hodnotě $p = K > 0$ populace neroste a při ještě větších už klesá.

Předpokládejme, že hodnoty $y_n = \delta p(n)/p(n)$ závisí na $p(n)$ lineárně. Tj. potřebujeme přímku v rovině proměnných p a y, která prochází body $[0, r]$ a $[K, 0]$. Proto

$$y = -\frac{r}{K} p + r.$$

Dosazením za y dostáváme

$$p(n+1) - p(n) = p(n)(-\frac{r}{K} p(n) + r),$$

tj. diferenční rovnici prvního řádu

$$p(n+1) = p(n)(1 - \frac{r}{K} p(n) + r).$$