(Drsná) Matematika

Martin Panák, Jan Slovák

Přednáška 2

4. Pravděpodobnost

- nahodilost nebo nedostatek znalostí parametrů popisovaného systému $\Longrightarrow$
  místo přesných hodnot pravděpodobné hodnoty
- relativní četnost pozorovaných hodnot může napovídat o pravděpodobném chování skalárních funkcí

Snažíme se formalizovat chování tak, abychom uměli ze známých pravděpodobností jednoduchých jevů odvozovat pravděpodobnosti jevů složitějších.

1.13. Co je pravděpodobnost? Banální příklad – obvyklé házení kostkou s šesti stranami s označeními $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- při házení „poctivou" kostkou, budeme očekávat a tudíž i předepisovat, že každá ze stran padá stejně často.
- každá předem vybraná strana padne s pravděpodobností $\frac{1}{6}$.
- nepořádná kostka – skutečné relativní četnosti výsledků nebudou stejné.

Veliký počtu pokusů $\Longrightarrow$ relativní četnosti jednotlivých výsledků hodů $\Longrightarrow$ pravděpodobnosti v našem matematickém popisu.

Při sebevětším počtu pokusů nemůžeme vyloučit možnost, že se náhodou povedla velice nepravděpodobná kombinace výsledků a že se tím náš matematický model skutečnosti stal nedobrým.

Náš cíl – naznačit abstraktní matematický popis pravděpodobnosti.

Jestli je adekvátní pro konkrétní pokusy či jiný problém, je záložitostí mimo samotnou matematiku.

Tím spíš by se ale takovým přemýšlením měli zabývat matematikové také (nejspíše ve spolupráci s jinými experty).

Později budeme vidět

- pravděpodobnost – teorie popisující chování nahodilých procesů nebo i plně determinovaných dějů, kde ovšem neznáme přesně všechny určující parametry
- matematická statistika – teorii umožňující posoudit, do jaké míry lze očekávat, že vybraný model je ve shodě s realitou, případně takový systematicky vyhledat.

Potřebný dosti rozsáhlý matematický aparát budeme několik semestrů budovat.

1.14. Náhodné jevy. Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme *základní prostor*.

Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná množina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$, představujícími jednotlivé *možné výsledky*. Každá podmnožina $A \subset \Omega$ představuje možný *jev*.

Systém podmnožin $\mathcal{A}$ základního prostoru se nazývá *jevové pole*, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$, tj. základní prostor je jevem,
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \cup B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich sjednocení.

Slovy se tak dá jevové pole charakterizovat jako systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme *náhodné jevy* (vzhledem k $\mathcal{A}$).

Pro naše házení kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jevové pole sestává ze všech podmnožin. Např. náhodný jev $\{1, 3, 5\}$ pak interpretujeme jako „padne liché číslo".

Něco málo terminologie, která by měla dále připomínat souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá *jistý jev*, prázdná podmnožina $\emptyset \subset \mathcal{A}$ se nazývá *nemožný jev*,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají *elementární jevy*,
- *společné nastoupení jevů* A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, *nastoupení alespoň jednoho z jevů* A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou *neslučitelné jevy*, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za *důsledek* jev B, když $A \subset B$,
- je-li $A \in \mathcal{A}$, pak se jev $B = \Omega \setminus A$ nazývá *opačný jev k jevu A*, píšeme $B = A^c$.

1.15. Definice. *Pravděpodobnostní prostor* je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s náseldujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme *pravděpodobností* na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Zjevně je okamžitým důsledkem našich definic řada prostých ale užitečných tvrzení. Např. je pro všechny jevy

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Matematickou indukcí snadno rozšířit aditivnost na jakýkoliv konečný počet neslučitelných jevů $A_i \subset \Omega$, $i \in I$, tj.

$P(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$, kdykoliv je $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j \in I$.

Složitější je to při sčítání pravděpodobností obecně.

1.16. Věta. *Buďte $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ libovolné jevy na základním prostoru Ω s jevovým polem $\mathcal{A}$. Pak platí*

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^k A_i) = {} & \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} P(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{\ell=j+1}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) \\ & - \cdots \\ & + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k). \end{aligned}$$

Je to tvrzení, kde nejtěžší je najít dobrou formulaci a pak se dá říci, že (intuitivně) je tvrzení zřejmé.

Důkaz intuitivně?

Tvrzení věty můžeme číst následovně: sečteme všechny pravděpodobnosti výsledků ze všech A_i zvlášť, pak ovšem musíme odečíst ty, které tam jsou započteny dvakrát (tj. prvky v průnicích dvou). Teď si ovšem dovolujeme odečíst příliš mnoho tam, kde ve skutečnosti byly prvky třikrát, tj. korigujeme přičtením pravděpodobností ze třetího členu, atd.

Důkaz doopravdy?

1.17. Poznámka. (Princip inkluze a exkluze)
Předpokládejme:

- všechny konečné podmnožniny základního prostoru Ω jsou jevy
- všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost

Pravděpodobnosti $P(A)$ udávají počet prvků příslušných podmnožin, až na společný faktor $\frac{1}{n}$, kde n je počet prvků základního prostoru. $\Longrightarrow$

Pro množiny M a jejich podmnožiny $A_1, \ldots, A_k$ platí:

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^{k} A_i)| =$$

$$|M| + \sum_{j=1}^{k} \left((-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j})| \right).$$

Skutečně, $| \cup_{i=1}^{k} A_i| + |M \setminus (\cup_{i=1}^{k} A_i)| = |M|$, tzn.

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^{k} A_i)| = |M| - | \cup_{i=1}^{k} A_i|$$

1.18. Definice. Nechť Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je právě systém všech podmnožin v Ω.

Klasická pravděpodobnost je takový pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s pravděpodobnostní funkcí $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zjevně takto zadaná funkce skutečně definuje pravděpodobnost.

1.19. Příklad. Házení kostkou tak dlouho, dokud nepadne šestka, ne však více než stokrát:

Pro jeden hod samostatně je Ω šest čísel od jedné do šesti a jde o klasickou pravděpodobnost.

Pro celé série našich hodů je základní prostor daleko větší – množina konečných posloupností čísel od jedné do šestky, které buď končí šestkou, mají nejvýše 100 členů a všechna předchozí čísla jsou menší než šest, nebo jde o 100 čísel od jedné do pěti.

Jevem A může být např. podmnožina „házení končí druhým pokusem“. Všechny příznivé elementární jevy pak jsou

$$[1,6],\ [2,6],\ [3,6],\ [4,6],\ [5,6].$$

Ze známé klasické pravděpodobnosti pro jednotlivé hody umíme odvodit pravděpodobnosti našich jevů v Ω. Není to ale jistě klasická pravděpodobnost.

Jev A je „nepadne šestka při prvém hodu a zároveň padne při druhém“: $P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

Obecněji: po právě $1 < k < 100$ hodech pokus skončí s pravděpodobností $(\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Ze všech možností je tedy nejpravděpodobnější, že skončí již napoprvé.

Jiný příklad: součty při hodu alespoň dvěmi kostkami.

Při hodu jednou kostkou je každý výsledek stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Při hodu dvěmi kostkami je každý předem zvolený výsledek (a, b), tj. dvojice přirozených čísel od jedné do šesti (včetně pořadí), stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{36}$. $\Longrightarrow$ dvě pětky padnou s poloviční pravděpodobností než dvě pevně zvolené různé hodnoty bez uvedení pořadí.

Počty možností pro součty:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Podobně pro součty hodu třemi kostkami.

1.20. Nezávislé jevy. Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a v něm jevy $A_1, \dots, A_k$.

Řekneme, že tyto jevy jsou *stochasticky nezávislé* (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže pro libovolné z nich vybrané jevy $A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell}$, $1 \leq \ell \leq k$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_\ell}).$$

Zjevně je každý podsystém stochasticky nezávislých jevů opět stochasticky nezávislý.

Pro dva stochasticky nezávislé jevy A, B

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ záměnou jednoho nebo více stochasticky nezávislých jevů za jejich opačné jevy obdržíme opět stochasticky nezávislé jevy.

Pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden ze stochasticky nezávislých jevů: Hledáme $P(A_1 \cup \cdots \cup A_k)$.

De Morganova pravidla,

$$A_1 \cup \cdots \cup A_k = (A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c)^c$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_k) &= 1 - P(A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c) \\ &= 1 - (1 - P(A_1)) \ldots (1 - P(A_k)). \end{aligned}$$

1.21. Podmíněná pravděpodobnost. Dotazy s dodatečnou podmínkou:

Např. „jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěmi kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?“.

Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Podmíněná pravděpodobnost* $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k hypotéze H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností pro jevy $A_1, \dots, A_k$ splňující $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$:

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \\ &\qquad = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}). \end{aligned}$$

Pokrácení čitatelů a jmenovatelů přímo dá výsledek.