(Drsná) Matematika

Martin Panák, Jan Slovák

Přednáška 4

2.6. Inverzní matice. Se skaláry: $a \cdot x = b \iff x = a^{-1} \cdot b$, kdykoliv inverze k a existuje. Podobně bychom to měli umět s maticemi?

Říkáme, že B je *matice inverzní* k matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Píšeme pak $B = A^{-1}$ a je samozřejmé, že obě matice musí mít tutéž dimenzi n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme *invertibilní matice*.

Pokud A^{-1} a B^{-1} existují, pak existuje i $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Je totiž (díky právě dokázané asociativitě násobení)

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A.B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E$$

a

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = E.$$

Soustava n rovnic pro n neznámých součinem matic:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Když existuje matice inverzní k matici A, pak $A^{-1} \cdot y = A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x$.

Naopak rozepsáním podmínky $A \cdot A^{-1} = E$ pro neznámé skaláry v hledané matici A^{-1} dostaneme n systémů lineárních rovnic se stejnou maticí na levé straně a různými vektory napravo.

2.7. Ekvivalentní úpravy matic. Z hlediska řešení systémů rovnic je jistě přirozené považovat za ekvivalentní matice, které zadávají systémy rovnic se stejným řešením. Takovým operacím říkáme *řádkové elementární transformace*. Jsou to:

- záměna dvou řádků
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem
- přičtení řádku k jinému řádku.

Analogicky, *sloupcové elementární transformace* matic jsou

- záměna dvou sloupců
- vynásobení vybraného sloupce nenulovým skalárem
- přičtení sloupce k jinému sloupci

ty však nezachovávají řešení příslušných rovnic, protože mezi sebou míchají samotné proměnné.

Systematicky můžeme použít elementární řádkové úpravy k postupné eliminaci proměnných. Postupu se většinou říká *Gausova eliminace.*

Tvrzení. *Nenulovou matici nad libovolným okruhem skalárů* $\mathbb{K}$ *lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) schodovitý tvar:*

- *Je-li* $a_{ij} = 0$ *a všechny předchozí prvky na i-tém řádku jsou také nulové, potom* $a_{kj} = 0$ *pro všechna* $k \geq i$
- *je-li* $a_{(i-1)j}$ *první nenulový prvek na* $(i-1)$*-vém řádku, pak* $a_{ij} = 0$.

Řádkově schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{lp} & \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

a může končit několika nulovými řádky. Algoritmus:

(1) Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.

(2) Pro $i = 2, \dots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.

(3) Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

2.8. Poznámka. Elementární řádkové (resp. sloupcové) transformace odpovídají vynásobením zleva (resp. zprava) následujícími maticemi:

(1) Přehození i-tého a j-tého řádku (resp. sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Vynásobení i-tého řádku (resp. sloupce) skalárem a:

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

(3) Sečtení i-tého řádku (resp. sloupce) s j-tým:

$$\begin{array}{cc} i \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array} \end{array}$$

2.9. Věta. *Pro každou matici A typu m/n nad polem skalárů $\mathbb{K}$ existují čtvercové invertibilní matice P dimenze m a Q dimenze n takové, že matice $P \cdot A$ je v řádkově schodovitém tvaru a*

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}$$

2.10. Algoritmus pro výpočet inverzní matice.

2. Determinanty

2.11. Definice determinantu. Připomeňme, že bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá *permutace množiny* X, viz **??**. Je-li $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, lze permutace zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prvek $x \in X$ se nazývá samodružným bodem permutace σ, je-li $\sigma(x) = x$. Permutace σ taková, že existují právě dva různé prvky $x, y \in X$ s $\sigma(x) = y$ a $\sigma(z) = z$ pro všechna ostatní $z \in X$ se nazývá *transpozice*, značíme ji (x, y).

V dimenzi dva

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \det A = ad - bc.$$

Obecně, nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad $\mathbb{K}$. *Determinant matice* A je skalár $\det A = |A|$ definovaný vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \dots, n\}$ a znaménko sgn pro každou permutaci ještě musíme popsat. Každý z výrazů $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ nazýváme *člen determinantu* $|A|$.

Jednoduché příklady už umíme: je-li $n = 1$, pak $|a_{11}| = a_{11} \in \mathbb{K}$ a pro $n = 2$ je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Podobně pro $n = 3$ se dá uhodnout

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tomuto vzorci se říká *Saarusovo pravidlo.*

Jak tedy najít správná znaménka? Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \ldots, n\}$ tvoří *inverzi v permutaci* σ, je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá *sudá* (resp. *lichá*), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.

Parita permutace σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ a značíme ji právě $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Tolik definice, chceme ale vědět, jak s paritou počítat. Z následujícího tvrzení už je jasně vidět, že Saarusovo pravidlo skutečně počítá determinant v dimenzi 3.

Tvrzení. *Na množině $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Tyto lze seřadit do posloupnosti tak, že každé dvě po sobě jdoucí se liší právě jednou transpozicí. Lze při tom začít libovolnou permutací a každá transpozice mění paritu.*

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Důsledkem tohoto popisu je, že na každé množině $X = \{1, \ldots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.

Jestliže složíme dvě permutace za sebou, znamená to provést napřed všechny transpozice tvořící první a pak druhou. Proto pro libovolné permutace $\sigma, \eta : X \to X$ platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta), \quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

2.12. Jednoduché vlastnosti determinantu. K $A = (a_{ij})$ typu m/n definujeme *matici transponovanou* $A^T = (a'_{ij})$ s prvky $a'_{ij} = a_{ji}$ typu n/m. Čtvercová matice A s vlastností $A = A^T$ se nazývá *symetrická*. Jestliže platí $A = -A^T$, pak se A nazývá antisymetrická.

Věta. (1) $|A^T| = |A|$,

(2) *Je-li jeden řádek v A tvořen nulovými prvky z $\mathbb{K}$, pak $|A| = 0$,*

(3) *Jestliže matice B vznikla z A výměnou dvou řádků, pak $|A| = -|B|$,*

(4) *Jestliže matice B vznikla z A vynásobením řádku skalárem $a \in \mathbb{K}$, pak $|B| = a|A|$,*

(5) *Jsou-li prvky k-tého řádku v A tvaru $a_{kj} = c_{kj} + b_{kj}$ a všechny ostatní řádky v maticích A, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ jsou stejné, pak $|A| = |B| + |C|$,*

(6) *Determinant $|A|$ se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku A lineární kombinaci ostatních řádků.*

2.13. Poznámka. Hezký důsledek (1): Kdykoliv se nám podaří dokázat nějaké tvrzení o determinantech formulované s využitím řádků příslušné matice, pak analogické tvrzení platí i pro sloupce. Např. tedy můžeme okamžitě všechna tvrzení (2)–(6) této věty přeformulovat i pro přičítání lineárních kombinací ostatních sloupců k vybranému.

Vlastnosti (3)–(5) říkají, že determinant jako zobrazení, které n vektorům dimenze n (řádkům nebo sloupcům matice) přiřadí skalár, je antisymetrické zobrazení lineární v každém svém argumentu, přesně jak jsme podle analogie z dimenze 2 požadovali.

Pro matici v řádkovém nebo sloupcovém schodovitém tvaru je jediným nenulovým členem determinantu ten, který odpovídá identické permutaci. Vidíme tedy, že determinant takové matice je $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$. Předchozí věta tedy poskytuje velice efektivní metodu výpočtu determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody, viz. 2.7.

2.14. Další vlastnosti determinantu.

Věta. *Nechť* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *jsou čtvercové matice dimenze* n *nad okruhem skalárů* $\mathbb{K}$. *Pak*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Rozvoj determinantu podle jednoho nebo více řádků či sloupců:

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_\ell} \end{pmatrix}$$

typu k/ℓ nazýváme *submaticí matice* A určenou řádky $i_1, \ldots, i_k$ a sloupci $j_1, \ldots, j_\ell$. Zbývajícími $(m-k)$ řádky a $(n-l)$ sloupci je určena matice M^* typu $(m-k)/(n-\ell)$, která se nazývá *doplňková submatice* k M v A.

Při $k = \ell$ je definován $|M|$, který nazýváme *subdeterminant* nebo *minor* řádu k matice A.

Je-li $m = n$, pak při $k = \ell$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá doplněk minoru $|M|$, nebo doplňkový minor k submatici M v matici A. Skalár

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá *algebraický doplněk* k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají *hlavní submatice*, jejich determinanty *hlavní minory* matice A. Při speciální volbě $k = \ell = 1,\ m = n$ hovoříme o *algebraickém doplňku* A_{ij} prvku a_{ij} matice A.

Pokud je $|M|$ hlavní minor matice A, pak přímo z definice determinantu je vidět, že součin $|M|$ s jeho algebraickým doplňkem je členem determinantu.

Nechť je obecná submatice M určena řádky $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ a sloupci $j_1 < \cdots < j_k$. Pak pomocí $(i_1 - 1) + \cdots + (i_k - k)$ výměn sousedních řádků a $(j_1 - 1) + \cdots + (j_k - k)$ výměn sousedních sloupců v A převedeme submatici M na hlavní submatici a doplňková matice přitom přejde právě na doplňkovou matici. Celá matice A přejde přitom v matici B, pro kterou platí podle 2.12 a definice determinantu $|B| = (-1)^\alpha |A|$, kde $\alpha = \sum_{h=1}^{k} (i_h - j_h) - 2(1 + \cdots + k)$. Tím jsme ověřili:

Tvrzení. *Nechť A je čtvercová matice dimenze n a $|M|$ je její minor řádu $k < n$. Pak součin libovolného členu $|M|$ s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem $|A|$.*

Věta. *Nechť* $A = (a_{ij})$ *je čtvercová matice dimenze* n *nad libovolným okruhem skalárů a nechť je pevně zvoleno* k *jejích řádků. Pak* $|A|$ *je součet všech* $\binom{n}{k}$ *součinů* $(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_l} \cdot |M| \cdot |M^*|$ *minorů řádu* k *vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

2.15. Důsledky Laplaceovy věty. Předchozí věta převádí výpočet $|A|$ na výpočet determinantů nižšího stupně. Této metodě výpočtu se říká *Laplaceův rozvoj* podle zvolených řádků či sloupců. Např. rozvoj podle i-tého řádku nebo i-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{ji}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplněk k prvku (minoru stupně 1) a_{ij}. Při praktickém počítání determinantů bývá výhodné kombinovat Laplaceův rozvoj s přímou metodou přičítání lineárních kombinací řádků či sloupců.

Jako trikovou ale elemntární aplikaci odvodíme důkaz Cauchyovy věty. Použijeme prostě dvakrát Laplaceův rozvoj na vhodné matice:

Uvažme nejprve matici H dimenze $2n$ (používáme tzv. blokovou symboliku, tj. píšeme matici jakoby složenou z matic)

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Laplaceovým rozvojem podle prvních n řádků obdržíme právě $|H| = |A| \cdot |B|$.

Nyní budeme k posledním n sloupcům postupně přičítat lineární kombinace prvních n sloupců tak, abychom obdrželi matici s nulami v pravém dolním rohu. Dostaneme

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky submatice nahoře vpravo přitom musí splňovat

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

neboli jde právě o prvky součinu $A \cdot B$ a $|K| = |H|$. Přitom rozvojem podle posledních n sloupců dostáváme

$$|K| = (-1)^{n+1+\cdots+2n}|A{\cdot}B| = (-1)^{2n\cdot(n+1)}\cdot|A{\cdot}B| = |A{\cdot}B|.$$

2.16. Determinant a inverzní matice. Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A, tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

My však kombinací Laplaceovy věty a Cauchyho věty umíme víc. Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A. Nazýváme ji *algebraicky adjungovaná matice* k matici A.

Věta. *Pro každou čtvercovou matici A nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ platí $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$. Zejména*

(1) *A^{-1} existuje jako matice nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ právě, když $|A|^{-1}$ existuje v $\mathbb{K}$*
(2) *Pokud existuje A^{-1}, pak platí $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$*