Příklad 1. *Kolika způsoby můžeme do pěti různých důlků vybrat po jedné kouli, vybíráme-li ze čtyř bílých, čtyř modrých a tří červených koulí?*

Řešení. Nejprve řešme úlohu v případě, že bychom měli k dispozici alespoň pět koulí od každé barvy. V tomto případě se jedná o volný výběr pěti prvků ze tří možností, tedy o variace s opakováním třetí třídy z pěti prvků (viz odstavec 2.4. učebních textů). Máme

$$V(3,5) = 3^5.$$

Nyní odečteme ty výběry, ve kterých se vyskytují buď pouze koule stejné barvy (takové výběry jsou tři), nebo právě čtyři koule červené (takových výběrů je $10 = 2 \cdot 5$; nejprve vybereme barvu koule, která nebude červená – dvě možnosti – a poté důlek, ve kterém bude – pět možností). Celkem tedy máme

$$3^5 - 3 - 10 = 230$$

možných výběrů. □

Příklad 2. *Najděte posloupnost, která vyhovuje nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:*

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 1, \quad x_1 = 2,\, x_2 = 2.$$

Řešení. Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b2^n$. Partikulárním řešením je konstanta $-1/2$. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b2^n - \frac{1}{2}.$$

Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = -5/6$, $b = 5/6$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$-\frac{5}{6}(-1)^n + \frac{5}{3}2^{n-1} - \frac{1}{2}.$$

□

Příklad 3. *Uvažujme Leslieho model růstu pro populaci krys, které máme rozděleny do tří věkových skupin: do jednoho roku, od jednoho do dvou let a od dvou let do tří. Předpokládáme, že se žádná krysa nedožívá více než tří let. Průměrná porodnost v jednotlivých věkových skupinách připadajících na jednu krysu je následující: v 1.skupině je to nula a ve druhé i třetí 2 krysy. Krysy, které se dožijí jednoho roku umírají až po druhém roce života (úmrtnost ve druhé skupině je nulová). Určete úmrtnost v první skupině víte-li, že daná populace krys stagnuje (počet jedinců v ní se nemění).*

Řešení. Leslieho matice daného modelu je (úmrtnost v první skupině označíme a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podmínka stagnace populace odpovídá tomu, že matice má vlastní hodnotu 1, neboli polynom $\lambda^3 - 2a\lambda - 2a$ má mít kořen 1, t.j $a = 1/4$. □

Příklad 4. *Nalezněte osu mimoběžek*

$$p: \ [1,1,1] + t(2,1,0), \quad q: \ [2,2,0] + t(1,1,1).$$

Řešení. $[3,2,1][8/3,8/3,2/3]$. □

Příklad 5. *Zodpovězte stručně, výstižně a formálně přesně:*

1. *Definujte determinant čtvercové matice.*
2. *Co je to charakteristický polynom matice a jak souvisí s vlastními vektory?*
3. *Podejte definici ortogonálních zobrazení a jejich charakterizaci pomocí matic.*

Řešení.

1. Viz odstavec 2.14 učebních textů.
2. Viz odstavec 2.38 učebních textů.
3. Viz odstavec 2.47 učebních textů.

□

Příklad 1. *Určete počet různých vět, které vzniknou přesmyčkami v jednotlivých slovech věty „Skokan na koks“ (vzniklé věty ani slova nemusejí dávat smysl).*

Řešení. Určíme nejprve počty přesmyček jednotlivých slov. Ze slova „skokan“ dostaneme $6!/2$ různých přesmyček, ze slova na dvě a ze slova koks $4!/2$. Celkem podle pravidla součinu $6!4!/2$. □

Příklad 2. *Určete posloupnost reálných čísel, která vyhovuje následující nehomogenní diferenční rovnici s počátečními podmínkami:*

$$2x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n + 2, \quad x_1 = 2,\, x_2 = 3.$$

Řešení. Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tvaru $a(-1)^n + b(1/2)^n$. Partikulárním řešením je konstanta 1. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice bez počátečních podmínek je tedy

$$a(-1)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1.$$

Dosazením do počátečních podmínek zjistíme konstanty $a = 1$, $b = 4$. Dané rovnici s počátečními podmínkami tedy vyhovuje posloupnost

$$(-1)^n + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1.$$

□

Příklad 3. *Určete všechny konstanty $a \in \mathbb{R}$ takové, aby polynomy $ax^2 + x + 2$, $-2x^2 + ax + 3$ a $x^2 + 2x + a$ byly lineárně závislé (ve vektorovém prostoru polynomů jedné proměnné nad reálnými čísly).*

Řešení. Polynomy budou závislé, právě když bude mít matice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ -2 & a & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

nulový determinant, tj. a bude kořenem polynomu $a^3 - 6a - 5 = (a+1)(a^2 - a - 5)$, tj. $a_1 = -1$, $a_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. □

Příklad 4. *Určete $\cos\alpha$, kde α je odchylka dvou sousedních stěn pravidelného osmistěnu (těleso, jehož stěny tvoří osm rovnostranných trojúhelníků).*

Řešení. Odchylky libovolných dvou sousedních stěn jsou ze symetrie osmistěnu shodné. Rovněž tak nezáleží na jeho velikosti. Uvažujme osmistěn s délkou hrany 1, který je umístěn do standardní kartézské souřadné soustavy v $\mathbb{R}^3$ tak, že jeho těžiště je v bodě $[0,0,0]$. Jeho vrcholy jsou pak v bodech $A = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0]$, $B = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$, $C = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0]$, $D = [0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$, $E = [0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ a $F = [0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Určeme odchylku stěn CDF a BCF. Ta je dána odchylkou vektorů kolmých na jejich průnik a ležících v daných stěnách, tedy vekorů kolmých na CF. Těmi jsou vektory dané výškami z bodů D, resp. F na základnu CF v trojúhelnících CDF, resp. BCF. Výšky v rovostranném trojúhelníku splývají s těžnicemi, jedná se tedy o úsečky SD a SB, kde S je střed strany CF. Protože známe souřadnice bodů C a F, má bod S souřadnice $[-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}]$ a pro vektory máme $SD = (\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$ a $SB = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$. Celkem

$$\cos\alpha = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})}{\|(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})\| \|(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})\|} = -\frac{1}{3} \doteq 132^\circ.$$

□

Příklad 5. *Zodpovězte stručně, výstižně a formálně přesně:*

1. *Popište strukturu množiny všech řešení systému lineárních rovnic v terminologii afinních prostorů a podprostorů.*
2. *Zadefinujte pojem relace ekvivalence.*
3. *Podejte definici symetrických zobrazení a jejich charakterizaci pomocí matic.*

Řešení.

1. Viz odstavec 4.4 učebních textů.
2. Viz odstavec 1.47 učebních textů.
3. Viz odstavec 3.14 učebních textů.

□