Příklady na cvičení k přednášce Matematika I
k odevzdání v týdnu 24.-28. října 2005

Příklad 1. *Určete, které z následujících relací na množině M jsou ekvivalence a pokud ano, popište příslušné třídy ekvivalence:*

1. *$M = \mathbb{N}$, $x \sim y \Leftrightarrow (NSD(x, y) > 1)$, kde $NSD(x, y)$ značí největšího společného dělitele čísel x a y.*

2. *$M = \mathbb{N}$, $x \sim y \Leftrightarrow (NSN(x, y) > 1)$, kde $NSN(x, y)$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y.*

3. *$M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (tj. M je množina vech funkcí z reálných do reálných čísel), $f \sim g \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x))$.*

Odpovědi zdůvodněte.

Příklad 2. *Najděte nenulový mnohočlen s celými koeficienty, tj. výraz typu $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$ $a_n \neq 0$, takový, že na množině $\mathbb{Z}_7$ nabývá pouze nulových hodnot (tj. dosadíme-li za x libovolný z prvků $\mathbb{Z}_7$ a výraz v $\mathbb{Z}_7$ vyčíslíme, dostaneme vždy nulu).*

Příklad 3. *Popište nějaké uspořádání přirozených čísel, které není dobré.*

Příklad 4. *Buď r a n přirozená čísla. Ukažte, že $\sqrt[r]{n}$ je buď přirozené nebo iracionální číslo.*

Příklad 5. *Uvažujme následující relaci na množině přirozených čísel:*

$$a \prec b \Leftrightarrow a^b < b^a.$$

Ukažte, že jde o ostré uspořádání (tranzitivní a asymetrická relace, kde asymetrická značí, že pro $x, y \in \mathbb{N}$ platí nejvýše jeden ze vstahů $x \prec y$, $y \prec x$) na množině přirozených čísel, které není úplné. Nalezněte minimální prvek, existuje-li.