Příklad 1. *Alešovi zbylo 2500 Kč z pořádání tábora. Aleš není žádný ňouma: 60 Kč přidal z kasičky a rozhodl se jít hrát ruletu na automaty. Aleš sází pouze na barvu. Pravděpodobnost výhry při sázce na barvu je 18/37. Začíná sázet na 10 Kč a pokud prohraje, v další sázce vsadí dvojnásobek toho, co v předchozí (pokud na to ještě má, pokud ne, tak končí). Pokud nějakou sázku vyhraje, v následující sázce hraje opět o 10 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že při tomto postupu vyhraje dalších 2500 Kč? (jakmile bude 2500 Kč v plusu, tak končí)*

Řešení.

$$\left(1-\left(\frac{19}{37}\right)^9\right)^{250} \doteq 0,53.$$

□

Příklad 2. *V afinní rovině $\mathbb{R}^2$ je ve standardní bázi dáno afinní zobrazení*

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vyjádřete toto zobrazení v bázi dané počátkem $[2,0]$ a bázovými vektory $(1,2)$ a $(1,0)$.

Řešení. V dané bázi máme vyjádření

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 3. *Spočítejte následující determinant čtvercové matice $n \times n$:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Matice se skládá z téměř samých nul, jedinými nenulovými prvky jsou jedničky, které tvoří velké písmeno N*).*

Řešení. První a poslední sloupec matice jsou lineárně závislé, determinant je tedy 0. □

Příklad 4. *V afinním prostoru $\mathbb{R}^3$ určete nějakou rovninu, která má odchylku $45°$ od roviny dané rovnicí*

$$x - y + z - 1 = 0.$$

Řešení. Nalezneme dva kolmé směry v dané rovině: jeden směr (vektor) zvolíme libovolně (rozdíl dvou různých bodů v rovině, nebo řešení zhomogenizované rce), např. $(0,1,1)$. K němu kolmý směr nalezneme např. vektorovým součinem s normálou k dané rovině: $(0,1,1)\times(1,-1,1) = (2,1,-1)$. Volíme-li jeden ze směrových vektorů dané roviny $(0,1,1)$, tak druhý můžeme volit na ose úhlu daného vektory $(1,-1,1)a(2,1,-1)$. Tam leží např. vektor daný počátkem a středem úsečky dané koncovými body vektorů stejné délky v daných směrech, tedy vektorů $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(2,1,-1)$, tedy vektor $(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{-1-\sqrt{2}}{2})$. Jedna z možných rovin je tedy rovina

$$\rho : [0,0,0] + t(0,1,1) + s((\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}).$$

Alternativně můžeme hledat normálu roviny, tedy vektor svírající s normálou dané roviny úhel $45°$.

□

Příklad

1. *Definujte pojem skalárního součinu vektorů.*
2. *Definujte pojem vnějšího součinu vektorů.*
3. *Zformulujte Cauchyovu nerovnost.*

Řešení.

1. Viz kapitola 2, bod 3.14 učebních textů.
2. Viz kapitola 4, bod 2.15 učebních textů.
3. Viz kapitola 4, věta 2.2 učebních textů.

□