Příklad 1. *Ze sáčku s pěti bílými a pěti červenými koulemi náhodně vytáhneme tři (koule do sáčku nevracíme). Jaká je pravděpodobnost, že dvě budou bílé a jedna červená?*

Řešení. Například rozdělíme uvažovaný jev na sjednocení tří disjunktních jevů: podle toho, kolikátou vytáhneme červenou kouli. Pravděpodobnosti, že vytáhneme koule přesně ve zvoleném pořadí jsou:

$$\frac{1}{2}\frac{4}{9}\frac{5}{8}, \quad \frac{1}{2}\frac{5}{9}\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\frac{5}{9}\frac{1}{2}.$$

Celkem $\frac{5}{12}$. □

Příklad 2. *Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Vlastní hodnota 3 jednonásobná, příslušný vlastní vektor $(-1, 1, 0)$, vlastní hodnota 2 dvojnásobná, příslušné vlastní vektory generují podprostor $\langle(1, 0, 1), (3, 1, 0)\rangle$. □

Příklad 3. *Uvažujme rovinu* $\mathbb{R}^2$ *se standardní soustavou souřadnic. Z počátku* $[0, 0]$ *je vyslán laserový paprsek ve směru* $(3, 1)$. *Dopadne na zrcadlovou přímku* p *danou parametricky jako*

$$p: \ [4, 3] + t(-2, 1),$$

a poté se odrazí (úhel dopadu je shodný s úhlem odrazu). V jakém bodě dopadne odražený paprsek na přímku q, *danou parametricky jako*

$$q: \ [7, -10] + t(-1, 6)?$$

Řešení. Směr paprsku svírá s přímkou p úhel $45°$, odražený paprsek tedy bude kolmý na dopadající, jeho směrový vektor bude $(1, -3)$ (pozor na orientaci!; daný směrový vektor můžeme též získat například zrcadlením podle kolmého vektoru k přímce p). Paprsek dopadne v bodě $[6, 2]$, odražený paprsek tedy bude mít rovnici

$$[6, 2] + t(1, -3), \ t \geq 0.$$

Průnik přímky dané odraženým paprskem s přímkou q je bod $[4, 8]$, což je mimo polopřímky dané odraženým paprskem ($t = -2$). Odražený paprsek tedy přímku q neprotne. □

Příklad 4. *Nalezněte nějakou ortonormální bázi vektorového podprostoru v* $\mathbb{R}^3$ *daného rovnicí*

$$2x - 3y + z = 0.$$

Příklad 5. *Zodpovězte stručně, výstižně a formálně přesně:*

1. *Definujte co rozumíme pod pojmem pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
2. *Bez použití pojmu matice definujte pojem lineárního zobrazení vektorového prostoru.*
3. *Definujte (standardní) afinní prostor.*

Řešení.

1. Viz učební texty, kapitola 1, bod 4.3.
2. Viz učební texty, kapitola 2, bod 3.8.
3. Viz učební texty, kapitola 4, bod 1.1.

□