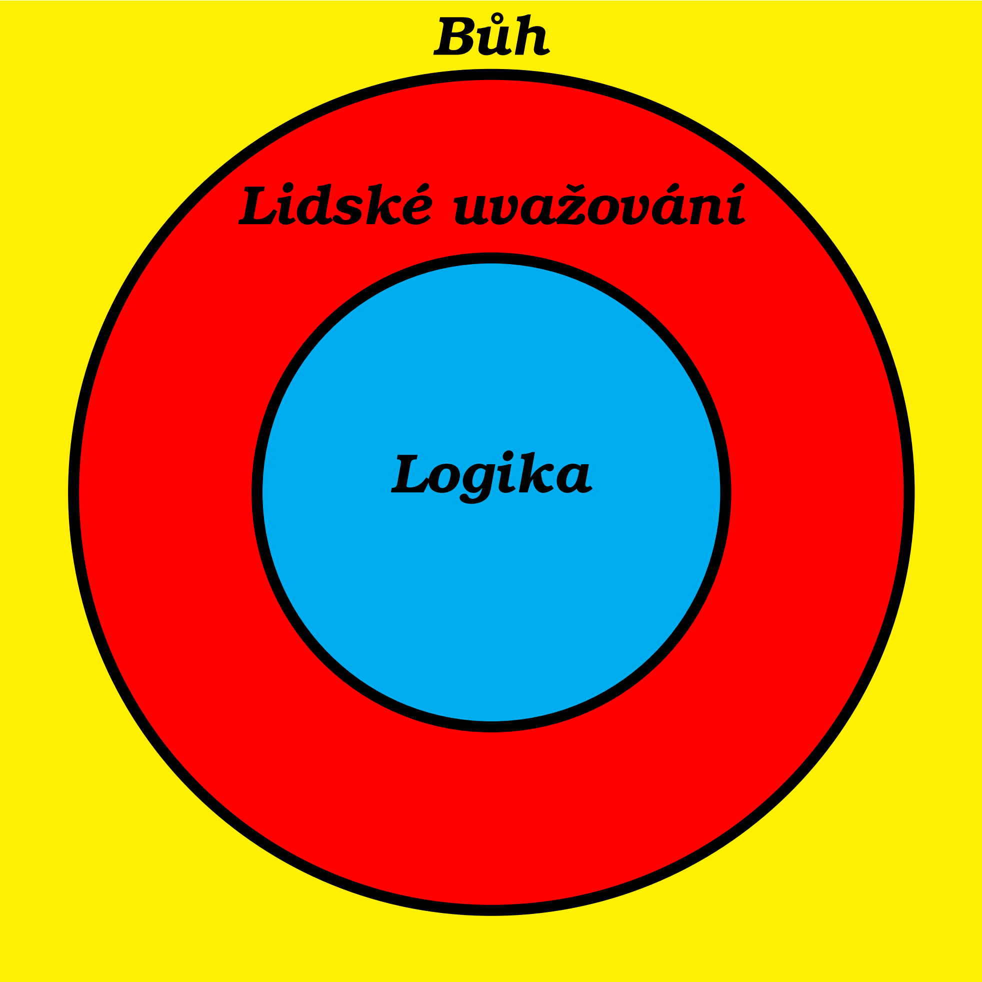
MATEMATICKÁ LOGIKA

Prezentace ke kurzu MA007

Antonín Kučera

2005



- *Logika* (z řeckého λογοσ) zkoumá způsob vyvozování závěrů z předpokladů.
- V běžné řeči se „logikou“ označuje myšlenková cesta, která vedla k daným závěrům.
- Logika nezkoumá lidské myšlení (psychologie) ani obecné poznání (epistemologie).
- *„Může (všemohoucí) Bůh stvořit kámen, který sám nedokáže uzvednout?“*

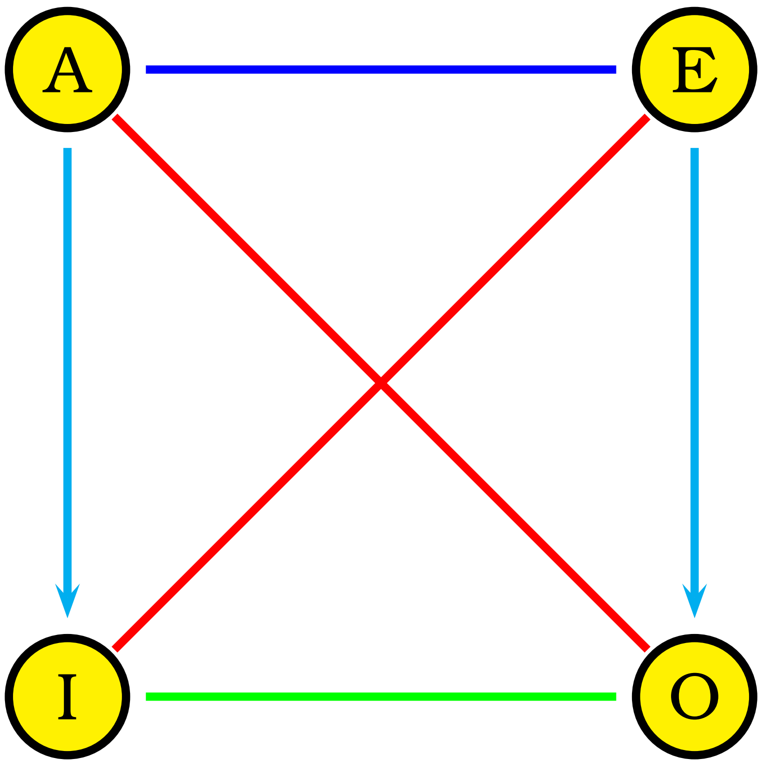
- *Neformální* logika studuje problematiku správné argumentace v přirozeném jazyce.
- *Formální* logika definuje a studuje abstraktní *odvozovací pravidla* (tj. *„formy úsudků“*), jejichž platnost nezávisí na významu pojmů, které v nich vystupují.
- Pod pojem *matematická logika* jsou obvykle zahrnovány dvě různé oblasti výzkumu:
  - → aplikace poznatků z oblasti formální logiky na matematiku (např. snaha „vnořit“ matematiku do logiky ve formě konečného systému axiomů a odvozovacích pravidel);
  - → aplikace matematických struktur a technik ve formální logice (např. teorie modelů, teorie důkazů, apod.)

Aristotelova logika.

Aristoteles (384-322 př. Kr.)

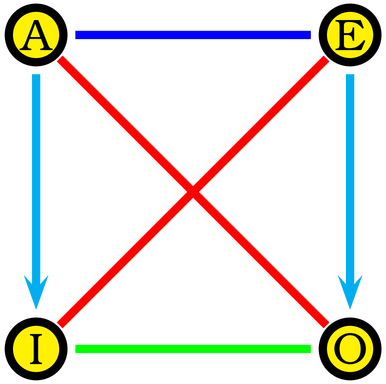
- Považován za zakladatele (formální) logiky.
- Zavedl a prozkoumal pojem *sylogismu*.
- Aristoteles zkoumal také pravdivostní módy a položil tak základy modální logiky.

ARISTOTELOVA LOGIKA. *Logický čtverec.*



Nechť S a P jsou *neprázdné* vlastnosti. Aristoteles rozlišuje následující základní *kategorická tvrzení*:

- A *všechna* S *jsou* P
- E *žádná* S *nejsou* P
- I *některá* S *jsou* P
- O *některá* S *nejsou* P
- Mnemonika: AffIrmo—nEgO (tvrdím—popírám)



- A a O jsou kontradiktorická, tj. nemohou být současně pravdivá ani současně nepravdivá. I a E jsou rovněž kontradiktorická.
- A a E jsou kontrární, tj. mohou být současně nepravdivá ale ne současně pravdivá.
- I a O jsou subkontrární, tj. mohou být současně pravdivá ale ne současně nepravdivá.
- I je subalterní (podřízené) A, tj. I je pravdivé jestliže A je pravdivé, a současně A je nepravdivé jestliže I je nepravdivé. Podobně O je subalterní E.

ARISTOTELOVA LOGIKA. *Sylogismy.*

- Sylogismy jsou jednoduché úsudky tvaru

  Hlavní premisa

  Vedlejší premisa

  $\therefore$ *Závěr*

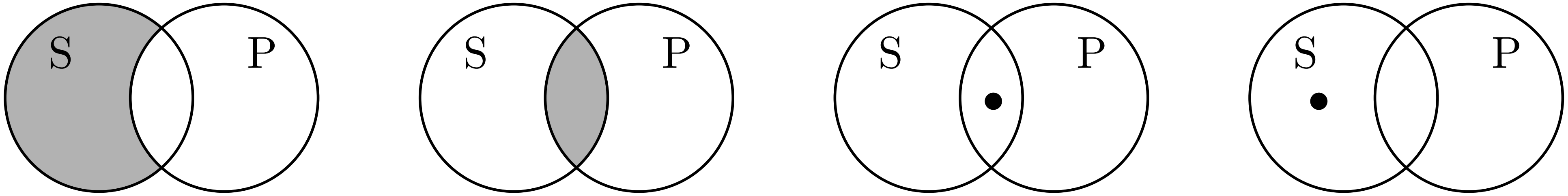
- Obě premisy i závěr jsou kategorická tvrzení tvaru A, E, I, O obsahující dohromady právě tři vlastnosti (označme je S, M, P), kde
  - hlavní premisa obsahuje S a M;
  - vedlejší premisa obsahuje P a M;
  - závěr je tvaru $S\ z\ P$.

- Lze tedy rozlišit následující čtyři *formy* sylogismů:

I:	II:	III:	IV:
$M\ x\ P$	$P\ x\ M$	$M\ x\ P$	$P\ x\ M$
$S\ y\ M$	$S\ y\ M$	$M\ y\ S$	$M\ y\ S$
$\therefore S\ z\ P$	$\therefore S\ z\ P$	$\therefore S\ z\ P$	$\therefore S\ z\ P$

- Celkem tedy existuje $4 \cdot 4^3 = 256$ sylogismů.

- Jen 24 sylogismů je *platných*:
  - → Forma I: AAA, AII, EAE, EIO (Barbara, Darii, Celarent, Ferio), AAI, EAO (subalterní módy);
  - → Forma II: AEE, EAE, AOO, EIO (Camestres, Cesare, Baroco, Festino), AEO, EAO (subalterní módy);
  - → Forma III: AAI, AII, EAO, EIO, OAO, IAI (Darapti, Datisi, Felapton, Ferison, Bocardo, Disamis);
  - → Forma IV: IAI, AAI, AEE, EAO, EIO (Dimatis, Bamalip, Calemes, Fesapo, Fresio), AEO (subalterní mód).
- O (ne)platnosti sylogismů se lze snadno přesvědčit pomocí *Vennových diagramů* (John Venn, 1834–1923).

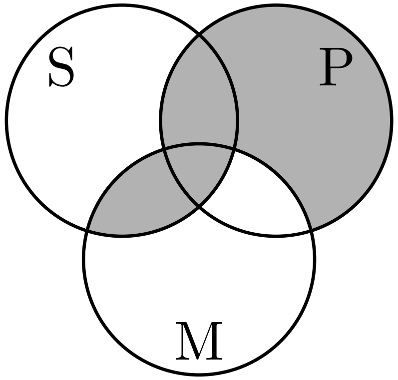


A	E	I	O
(všechna S jsou P)	*(žádná S nejsou P)*	*(některá S jsou P)*	*(některá S nejsou P)*

- šedé oblasti jsou prázdné;
- symbol „•“ označuje neprázdné oblasti;
- bílé oblasti mohou být prázdné i neprázdné.

- Uvažme nyní např. AEE sylogismus druhé formy (Camestres):

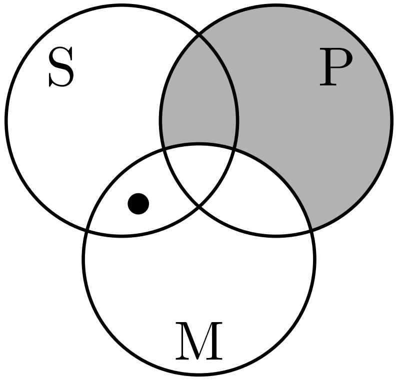
  Všechna P jsou M
  Žádná S nejsou M
  ∴ Žádná S nejsou P

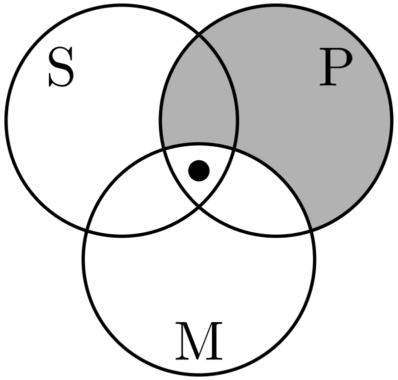


  Tento sylogismus je tedy platný.

- Pro AIO sylogismus druhé formy dostáváme:

  Všechna P jsou M
  Některá S jsou M
  ∴ Některá S nejsou P

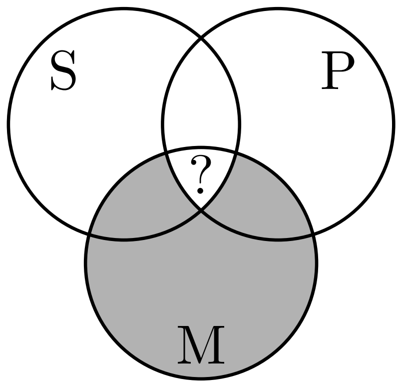




  Druhý diagram podává protipříklad, sylogismus platný není.

- Rozeberme ještě *AAI* sylogismus třetí formy (Darapti):

Všechna M jsou P
Všechna M jsou S
∴ Některá S jsou P



Tento sylogismus je v Aristotelově logice považován za *platný*. Je však třeba použít předpoklad, že každá vlastnost je *neprázdná*. Tento předpoklad ale přináší jisté problémy:

Všechny skleněné hory jsou skleněné.
Všechny skleněné hory jsou hory.
∴ Některé hory jsou skleněné.

Hlavní i vedlejší premisa jsou na intuitivní úrovni pravdivá tvrzení, závěr však nikoliv.

BOOLEOVA „ALGEBRA LOGIKY."

George Boole (1815–1864)

- Aplikoval algebraické techniky při formalizaci procesu odvozování. Nalezl souvislost mezi algebrou a sylogismy.
- Booleova „algebra logiky" se chová podobně jako algebra čísel. Násobení odpovídá logické spojce „*a současně*", sčítání logické spojce „*nebo*", apod. (Odtud pocházejí pojmy „*logický součin*" a „*logický součet*".).

Uvažme následující sylogismus:

Všechna S *jsou* M

Žádná M *nejsou* P

$\therefore$ *Žádná* S *nejsou* P

Pokud vlastnosti identifikujeme se soubory objektů univerza, pro které platí, můžeme uvedený sylogismus přepsat na

$$\begin{aligned} S &\subseteq M \\ M \cap P &= 0 \\ \therefore\quad S \cap P &= 0 \end{aligned} \qquad \text{a dále na} \qquad \begin{aligned} S \cap M' &= 0 & (1) \\ M \cap P &= 0 & (2) \\ \therefore\quad S \cap P &= 0 & (3) \end{aligned}$$

Pokusme se nyní „odvodit“ (3) z (1) a (2):

- Z toho, že $S \cap M' = 0$ a $X \cap 0 = 0$ pro libovolné X dostáváme

$$(S \cap M') \cap P = 0 \qquad (4)$$

- Podobně z (2) plyne $(M \cap P) \cap S = 0$ (5).

- Ze (4), (5) a faktu, že $0 \cup 0 = 0$, plyne

$$((S \cap M') \cap P) \cup ((M \cap P) \cap S) = 0 \qquad (6)$$

- Užitím asociativity a komutativity $\cup$ a $\cap$ dostáváme z (6)

$$((S \cap P) \cap M') \cup ((S \cap P) \cap M) = 0 \qquad (7)$$

- Nyní podle distributivního zákona lze (7) přepsat na

$$(S \cap P) \cap (M' \cup M) = 0 \qquad (8)$$

- Jelikož $X \cup X' = 1$ a $X \cap 1 = X$ pro libovolné X, dostáváme z (8) konečně

$$S \cap P = 0$$

což bylo dokázat.

V předchozím příkladu jsme k dokázání sylogismu použili symbolickou manipulaci se symboly S, M a P podle následujících *algebraických identit* (tj. nezabývali jsme se tím, jaký mají symboly $\cup$, $\cap$, 0, 1, a $'$ *význam*).

$$
\begin{aligned}
X \cup X &= X & X \cup X' &= 1 \\
X \cap X &= X & X \cap X' &= 0 \\
X \cup Y &= Y \cup X & X'' &= X \\
X \cap Y &= Y \cap X & X \cup 1 &= 1 \\
X \cup (Y \cup Z) &= (X \cup Y) \cup Z & X \cap 1 &= X \\
X \cap (Y \cap Z) &= (X \cap Y) \cap Z & X \cup 0 &= X \\
X \cap (X \cup Y) &= X & X \cap 0 &= 0 \\
X \cup (X \cap Y) &= X & (X \cup Y)' &= X' \cap Y' \\
X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) & (X \cap Y)' &= X' \cup Y' \\
X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) & &
\end{aligned}
$$

- Tyto identity definují algebraickou strukturu, které se později začalo říkat *Booleva algebra* (případně *Booleův svaz*).
- V původní Booleově notaci se
  - → místo $X \cap Y$ píše $X.Y$ (případně jen XY);
  - → místo $X \cup Y$ píše $X + Y$;
  - → místo X' píše $1 - X$.

  V této notaci pak identity dostávají „číselnou podobu“ a Boole sám se pokoušel převést další „číselné konstrukce“ (např. dělení, ale i Taylorův rozvoj) do své „algebry logiky“. Tyto úvahy však již byly zcela mylné.

- Podle Boolea je každý sylogismus možné zapsat ve tvaru

$$
\begin{aligned}
F_1(P,M) &= 0\\
F_2(S,M) &= 0\\
\therefore\quad F(S,P) &= 0
\end{aligned}
$$

kde $F_1(P,M)$, $F_2(S,M)$, $F(S,P)$ jsou vhodné výrazy vytvořené ze symbolů 0, 1, $\cup$, $\cap$, $'$ a symbolů v závorkách.

- Boole uvážil obecnější úsudky tvaru

$$
\begin{aligned}
F_1(A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_n) &= 0\\
&\vdots\\
F_k(A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_n) &= 0\\
\therefore\quad F(B_1,\dots,B_n) &= 0
\end{aligned}
$$

- Cílem jeho snah bylo vyvinout metodu, která umožní
  1. zjistit, zda je daný úsudek *pravdivý*;
  2. nalézt *nejobecnější* závěr (F) pro dané předpoklady ($F_1,\dots,F_k$).

Definice 1. *Nechť* $\vec{A} = A_1, \ldots, A_n$. $\vec{A}$*-konstituent je výraz tvaru* $\ell_1 \cap \cdots \cap \ell_n$, *kde* ℓ_i *je buď* A_i *nebo* A_i'.

Věta 2. *Pro každý výraz* $F(X_1, \cdots, X_n)$ *platí*

$$F(X_1, \cdots, X_n) = \bigcup_{\vec{v} \in \{0,1\}^n} F(\vec{v}) \cap \ell_1(\vec{v}) \cap \cdots \cap \ell_n(\vec{v})$$

kde $\ell_i(\vec{v})$ *je buď* X_i *nebo* X_i' *podle toho, zda je* $\vec{v}_i$ *rovno* 1 *nebo* 0.

Příklad 3. *Nechť* $F(A, B) = (A \cup B') \cap (A' \cup B)$. *Pak*

$$\begin{aligned}
F(A, B) &= (F(0,0) \cap A' \cap B') \cup (F(0,1) \cap A' \cap B) \\
&\quad \cup (F(1,0) \cap A \cap B') \cup (F(1,1) \cap A \cap B) \\
&= (1 \cap A' \cap B') \cup (0 \cap A' \cap B) \cup (0 \cap A \cap B') \cup (1 \cap A \cap B) \\
&= (A' \cap B') \cup (A \cap B)
\end{aligned}$$

Věta 4. *Úsudek*

$$\begin{aligned} F_1(A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_k(A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n) &= 0 \\ \therefore \quad F(B_1,\ldots,B_n) &= 0 \end{aligned}$$

je platný právě když každý $\vec{A}, \vec{B}$*-konstituent výrazu* F *je* $\vec{A}, \vec{B}$*-konstituentem některého* F_i.

Příklad 5. *Uvažme opět sylogismus*

$$\begin{aligned} S \cap M' &= 0 \\ M \cap P &= 0 \\ \therefore \quad S \cap P &= 0 \end{aligned}$$

Pak $\vec{A} = M$ *a* $\vec{B} = S, P$. *Uvažme* $\vec{A}, \vec{B}$*-konstituenty jednotlivých výrazů:*

$$\begin{aligned} S \cap M' &: \quad M' \cap S \cap P, \quad M' \cap S \cap P' \\ M \cap P &: \quad M \cap S \cap P, \quad M \cap S' \cap P \\ S \cap P &: \quad M \cap S \cap P, \quad M' \cap S \cap P \end{aligned}$$

Nechť $\vec{A} = A_1, \ldots, A_m$, $\vec{B} = B_1, \ldots, B_n$. Uvažme předpoklady tvaru

$$F_1(\vec{A}, \vec{B}) = 0, \cdots, F_k(\vec{A}, \vec{B}) = 0$$

Cílem je nalézt nejobecnější závěr tvaru $F(\vec{B}) = 0$. Označme

$$E(\vec{A}, \vec{B}) = F_1(\vec{A}, \vec{B}) \cup \cdots \cup F_k(\vec{A}, \vec{B})$$

Věta 6. *Nejobecnější závěr* $F(\vec{B}) = 0$, *který plyne z* $E(\vec{A}, \vec{B}) = 0$, *je tvaru*

$$F(\vec{B}) = \bigcap_{\vec{v} \in \{0,1\}^m} E(\vec{v}, \vec{B})$$

Příklad 7. *Nejobecnější závěr* $F(S, P)$ *plynoucí z předpokladů* $S \cap M' = 0$ *a* $M \cap P = 0$ *je tvaru*

$$\begin{aligned} F(S, P) &= ((S \cap 0') \cup (0 \cap P)) \cap ((S \cap 1') \cup (1 \cap P)) \\ &= S \cap P \end{aligned}$$

VÝSTAVBA FORMÁLNÍCH LOGICKÝCH SYSTÉMŮ.

- Potřebujeme znát jisté pojmy a umět myslet (*metaúroveň*).
  - Musí být např. jasné, co myslíme symbolem, konečnou posloupností, atd.
  - Metapojmy a formální pojmy se bohužel často „značí“ stejně. Tím vzniká (nesprávný) dojem, že formální pojmy jsou definovány pomocí „sebe sama“ (typickým příkladem je *důkaz* nebo *množina*).
  - Co všechno si lze na metaúrovni dovolit? (*potenciální* vs. *aktuální* nekonečno).
- Základní kroky:
  - Vymezení užívaných symbolů (abeceda).
  - Syntaxe formulí.
  - Sémantika (zde se objeví pojem *pravdivost*).
  - Odvozovací systém (zde se objeví pojem *dokazatelnost*).

Definice 8. *Abecedu výrokové logiky tvoří následující symboly:*

- *znaky pro výrokové proměnné* $A, B, C, \ldots$, *kterých je spočetně mnoho;*
- *logické spojky* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$
- *závorky* $($ *a* $)$

Definice 9. *Formule výrokové logiky je slovo* φ *nad abecedou výrokové logiky, pro které existuje vytvořující posloupnost, tj. konečná posloupnost slov* $\psi_1, \cdots, \psi_k$, *kde* $k \geq 1$, ψ_k *je* φ, *a pro každé* $1 \leq i \leq k$ *má slovo* ψ_i *jeden z následujících tvarů:*

- *výroková proměnná,*
- $\neg\psi_j$ *pro nějaké* $1 \leq j < i$,
- $(\psi_j \circ \psi_{j'})$ *pro nějaká* $1 \leq j, j' < i$, *kde* $\circ$ *je jeden ze symbolů* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.

Poznámka 10. *Notace: vnější závorky budeme zpravidla vynechávat. Např. místo* $(A \vee \neg B)$ *budeme psát* $A \vee \neg B$.

Definice 11. *Pravdivostní ohodnocení (valuace) je zobrazení v, které každé výrokové proměnné přiřadí hodnotu 0 nebo 1.*

Metamatematickou indukcí k délce vytvořující posloupnosti lze každou valuaci v jednoznačně rozšířit na všechny výrokové formule:

- $v(A)$ je již definováno;
- $v(\neg\psi) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v(\psi) = 1; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $v((\psi_1 \wedge \psi_2)) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v(\psi_1) = 0 \text{ nebo } v(\psi_2) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $v((\psi_1 \vee \psi_2)) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v(\psi_1) = 0 \text{ a současně } v(\psi_2) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $v((\psi_1 \rightarrow \psi_2)) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v(\psi_1) = 1 \text{ a současně } v(\psi_2) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$

Definice 12. *Výroková formule φ je*

- *pravdivá (resp. nepravdivá) při valuaci v, pokud $v(\varphi) = 1$ (resp. $v(\varphi) = 0$);*
- *splnitelná, jestliže existuje valuace v taková, že $v(\varphi) = 1$;*
- *tautologie (také (logicky) pravdivá), jestliže $v(\varphi) = 1$ pro každou valuaci v.*

Soubor T výrokových formulí je splnitelný, jestliže existuje valuace v taková, že $v(\varphi) = 1$ pro každé φ z T.

Definice 13. *Formule φ a ψ jsou ekvivalentní, psáno $\varphi \approx \psi$, právě když pro každou valuaci v platí, že $v(\varphi) = v(\psi)$.*

Příklad 14. *Nechť φ, ψ, ξ jsou výrokové formule. Pak:*

$$
\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &\approx \psi \wedge \varphi \\
\varphi \wedge (\psi \wedge \xi) &\approx (\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \\
\varphi \wedge (\psi \vee \xi) &\approx (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi) \\
\neg(\varphi \wedge \psi) &\approx \neg\varphi \vee \neg\psi \\
\neg\neg\varphi &\approx \varphi
\end{aligned}
$$

Poznámka 15. *„Identity" z příkladu 14 umožňují dále zpřehlednit zápis formulí. Např. místo* $(A \vee B) \vee C$ *můžeme (nejednoznačně) psát* $A \vee B \vee C$*. Tato nejednoznačnost nevede k problémům, neboť příslušné definice a tvrzení „fungují" pro libovolné možné uzávorkování.*

Poznámka 16. *V teorii výpočetní složitosti se dokazuje, že problém zda daná výroková formule* φ *je splnitelná (resp. tautologie) je NP-úplný (resp. co-NP-úplný). Otázka, zda existuje efektivní (polynomiální) algoritmus pro uvedené problémy, je ekvivalentní otázce zda* $P = NP$*.*

Definice 17. *Formule* φ *je tautologickým důsledkem souboru formulí* T*, psáno* $T \models \varphi$*, jestliže* $v(\varphi) = 1$ *pro každou valuaci* v *takovou, že* $v(\psi) = 1$ *pro každou formuli* ψ *ze souboru* T*. Jestliže* $T \models \varphi$ *pro prázdný soubor* T*, píšeme krátce* $\models \varphi$*.*

Někdy se sémantika výrokových spojek definuje „předem“ pomocí *pravdivostních tabulek*:

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X	Y	$X \rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

X	$\neg X$
0	1
1	0

Pojmy „pravdivostní tabulka“ a „výroková spojka“ je možné dále zobecnit a uvážit formální logické systémy budované na obecnějším základu:

Definice 18. *Výroková funkce je funkce* $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, *kde* $n \geq 1$.

Nechť $F_1, \cdots, F_k$ je konečný soubor výrokových funkcí. Definujeme formální logický systém $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$, kde

- Abeceda je tvořena znaky pro výrokové proměnné, závorkami a znaky $\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_k$ pro uvedené výrokové funkce.

- V definici vytvořující posloupnosti formule (viz *definice 48*) požadujeme, aby ψ_i bylo buď výrokovou proměnnou nebo tvaru $\mathcal{F}_j(\psi_{j_1}, \cdots, \psi_{j_n})$, kde $1 \leq j_1, \cdots, j_n < i$ a n je arita F_j.

- Valuace rozšíříme z výrokových proměnných na formule předpisem

$$v(\mathcal{F}(\psi_1, \cdots, \psi_n)) = F(v(\psi_1), \cdots, v(\psi_n))$$

V tomto smyslu je pak dosud uvažovaný systém výrokové logiky systémem $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$. Dříve zavedené sémantické pojmy (splnitelnost, pravdivost, atd.) se opírají pouze o pojem valuace a „fungují“ tedy v *libovolném* systému $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$.

Pro účely následující definice zvolme libovolné (ale dále pevné) lineární uspořádání $\sqsubseteq$ na souboru všech výrokových proměnných.

Definice 19. *Nechť* φ *je formule* $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$ *a nechť* $X_1, \cdots, X_n$ *je vzestupně uspořádaná posloupnost (vzhledem k* $\sqsubseteq$*) všech výrokových proměnných, které se ve* φ *vyskytují. Formule* φ *jednoznačně určuje výrokovou funkci* $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *danou předpisem* $F_\varphi(\vec{u}) = \nu(F)$*, kde* ν *je valuace definovaná takto:* $\nu(X_i) = \vec{u}(i)$ *pro každé* $1 \leq i \leq n$, $\nu(Y) = 0$ *pro ostatní* Y*.*

Definice 20. *Systém* $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$ *je plnohodnotný, jestliže pro každou výrokovou funkci* F *existuje formule* φ *systému* $\mathcal{L}(F_1, \cdots, F_k)$ *taková, že* $F = F_\varphi$.

Věta 21. *Systém* $\mathcal{L} = (\wedge, \vee, \neg)$ *je plnohodnotný.*

Důkaz. Nechť $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ je výroková funkce a nechť $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k$ jsou všechny vektory z $\{0,1\}^n$, pro které nabývá F hodnoty 1. Pokud žádný takový vektor není (tj. $k = 0$), klademe $\varphi = X_1 \wedge \neg X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n$. Jinak

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{k} \ell_1(u_i) \wedge \cdots \wedge \ell_k(u_i)$$

kde $\ell_j(u_i)$ je buď X_j nebo $\neg X_j$ podle toho, zda $u_i(j) = 1$ nebo $u_i(j) = 0$. Nyní se lehce ověří, že $F = F_\varphi$. $\square$

Uvažme následující výrokové funkce:

X	Y	$X \curlywedge Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

X	Y	$X \mid Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

X	Y	Z	$\odot(X, Y, Z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

- Funkce $\curlywedge$ se nazývá *Schröderův* operátor. Platí $\varphi \curlywedge \psi \;\approx\; \neg\varphi \wedge \neg\psi$.
- Funkce $\mid$ se nazývá *Shefferův* operátor. Platí $\varphi \mid \psi \;\approx\; \neg(\varphi \wedge \psi)$.

Následující systémy výrokové logiky jsou plnohodnotné:

- $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \neg)$ *Věta 21*.
- $\mathcal{L}(\wedge, \neg)$ $\varphi \vee \psi \approx \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\mathcal{L}(\vee, \neg)$ $\varphi \wedge \psi \approx \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$ $\varphi \vee \psi \approx \neg\varphi \rightarrow \psi$
- $\mathcal{L}(\curlywedge)$ $\neg\varphi \approx \varphi \curlywedge \varphi$, $\varphi \vee \psi \approx (\varphi \curlywedge \varphi) \curlywedge (\varphi \curlywedge \varphi)$
- $\mathcal{L}(|)$ $\neg\varphi \approx \varphi \mid \varphi$, $\varphi \wedge \psi \approx (\varphi \mid \psi) \mid (\varphi \mid \psi)$
- $\mathcal{L}(\odot)$ $\neg\varphi \approx \odot(\varphi, \varphi, \varphi)$,
  $\varphi \rightarrow \psi \approx \odot(\varphi, \odot(\varphi, \varphi, \varphi), \odot(\varphi, \psi, \odot(\varphi, \varphi, \varphi)))$

Následující systémy plnohodnotné nejsou:

- $\mathcal{L}(\wedge)$, $\mathcal{L}(\vee)$, $\mathcal{L}(\rightarrow)$, $\mathcal{L}(\neg)$, atd.

Definice 22. *Výroková funkce* F *je Shefferovská jestliže* $\mathcal{L}(F)$ *je plnohodnotný systém.*

Věta 23. *Nechť* $S(n)$ *značí počet všech Shefferovských funkcí arity* $n \geq 1$. *Pak* $S(n) = 2^{(2^{n-1}-1)}(2^{(2^{n-1}-1)} - 1)$.

Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ dostáváme postupně $0, 2, 56, 16256, 1073709056, \ldots$

Důsledek 24. *Jelikož* $\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{2^{2^n}} = 1/4$, *je (pro velká* n*) zhruba čtvrtina ze všech výrokových funkcí arity* n *Shefferovská.*

Poznámka 25. *Výsledky o Shefferovských funkcích nalézají uplatnění při výrobě logických obvodů; na „podkladové desce“ se např. vytvoří hustá síť binárních* $|$*-hradel. Obvody různé funkce se pak realizují jejich vhodným propojením.*

Definice 26.

- *Literál je formule tvaru X nebo $\neg X$, kde X je výroková proměnná;*
- *Klauzule je formule tvaru $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$, kde $n \geq 1$ a každé ℓ_i je literál.*
- *Duální klauzule je formule tvaru $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_n$, kde $n \geq 1$ a každé ℓ_i je literál.*
- *Formule v konjunktivním normálním tvaru (CNF) je formule tvaru $C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$, kde $m \geq 1$ a každé C_i je klauzule.*
- *Formule v disjunktivním normálním tvaru je formule tvaru $C_1 \vee \cdots \vee C_m$, kde $m \geq 1$ a každé C_i je duální klauzule.*

Okamžitým důsledkem *věty 21* je následující:

Věta 27. *Pro každou formuli φ existuje ekvivalentní formule v disjunktivním normálním tvaru.*

Věta 28. *Pro každou formuli φ existuje ekvivalentní formule v konjunktivním normálním tvaru.*

Důkaz. Podle *Věty 27* existuje k φ ekvivalentní formule v disjunktivním normálním tvaru, tj. $\varphi \approx \bigvee_{i=1}^{n} D_i$, kde $n \geq 1$ a každé D_i je duální klauzule. Metaindukcí vzhledem k n:

- $n = 1$. Pak $\bigvee_{i=1}^{n} D_i$ je současně v CNF.
- *Indukční krok:* Nechť $D_1 = \ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k$. Platí
$$\bigvee_{i=1}^{n+1} D_i \approx D_1 \vee \bigvee_{i=2}^{n+1} D_i \approx D_1 \vee \bigwedge_{i=1}^{m} C_i \approx \bigwedge_{i=1}^{m} D_1 \vee C_i \approx \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k} (\ell_j \vee C_i)$$

$\square$

Příklad 29. *Formuli* $(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to A)$ *lze v CNF reprezentovat jako* $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$ *nebo* $(\neg A \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$. *CNF tedy není určena jednoznačně až na pořadí klauzulí a literálů.*

Věta 30 (o kompaktnosti). *Nechť* T *je soubor formulí výrokové logiky.* T *je splnitelný právě když každá konečná část* T *je splnitelná.*

Důkaz. Směr „⇒" je triviální. Dokážeme „⇐". Zavedeme pomocný pojem: soubor V výrokových formulí je *dobrý*, jestliže každý konečný podsoubor V je splnitelný. Nechť $\psi_1, \psi_2, \ldots$ je posloupnost *všech* formulí výrokové logiky. Metamatematickou indukcí definujeme pro každé $i \geq 1$ *dobrý* soubor S_i:

- $S_1 = T$. Soubor S_1 je dobrý neboť T je dobrý.
- $S_{i+1} = \begin{cases} S_i \cup \{\psi_i\} & \text{jestliže } S_i \cup \{\psi_i\} \text{ je dobrý;} \\ S_i \cup \{\neg\psi_i\} & \text{jinak.} \end{cases}$

  Alespoň jeden ze souborů $S_i \cup \{\psi_i\}$ a $S_i \cup \{\neg\psi_i\}$ *musí* být dobrý; jinak existují konečné $V_1 \subseteq S_i \cup \{\psi_i\}$ a $V_2 \subseteq S_i \cup \{\neg\psi_i\}$, které nejsou splnitelné. Jestliže $V_1 \subseteq S_i$ nebo $V_2 \subseteq S_i$, máme ihned spor s tím, že S_i je dobrý; jinak $V_1 \cup V_2$ obsahuje ψ i $\neg\psi$, proto i $(V_1 \cup V_2) \setminus \{\psi_i, \neg\psi_i\} \subseteq S_i$ je nesplnitelný, spor.)

Nechť $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Dokážeme, že S má následující vlastnosti:

- S *obsahuje* φ *právě když* S *neobsahuje* $\neg\varphi$.

  S nutně obsahuje φ nebo $\neg\varphi$. Jestliže S obsahuje φ i $\neg\varphi$, existuje S_i obsahující φ i $\neg\varphi$; tedy $\{\varphi, \neg\varphi\}$ je nesplnitelný podsoubor S_i, spor.

- S *obsahuje* $\varphi \wedge \psi$ *právě když* S *obsahuje* φ *i* ψ;
- S *obsahuje* $\varphi \vee \psi$ *právě když* S *obsahuje* φ *nebo* ψ;
- S *obsahuje* $\varphi \rightarrow \psi$ *právě když* S *neobsahuje* φ *nebo obsahuje* ψ.

Buď v valuace definovaná takto: $v(A) = 1$ právě když A patří do S. Indukcí k délce vytvořující posloupnosti se nyní snadno ověří (s využitím výše uvedených vlastností S), že:

- S *obsahuje* φ *právě když* $v(\varphi) = 1$.

Tedy S (a proto i T) je splnitelný. $\square$

Užitím *věty 30* lze snadno dokázat řadu dalších tvrzení.

- *Graf* $\mathcal{G}$ je dvojice (U, H), kde U je nejvýše spočetný soubor *uzlů* a H je areflexivní a symetrická relace na U.
- *Podgraf* grafu $\mathcal{G}$ je graf $\mathcal{G}' = (U', H')$, kde $U' \subseteq U$ a $H' \subseteq H$.
- Graf $\mathcal{G} = (U, H)$ je k-*obarvitelný* jestliže existuje funkce $f : U \to \{1, \cdots, k\}$ taková, že $f(u) \neq f(v)$ pro každé $(u, v) \in H$.

Věta 31. *Graf* $\mathcal{G} = (U, H)$ *je* k*-obarvitelný právě když každý konečný podgraf* $\mathcal{G}$ *je* k*-obarvitelný.*

Důkaz. Nechť $B_{u,i}$ je výroková proměnná pro každý uzel u a každé $1 \leq i \leq k$. Buď T soubor tvořený následujícími formulemi:

- $B_{u,1} \vee \cdots \vee B_{u,k}$ pro každý uzel u;
- $B_{u,i} \to \neg B_{u,j}$ pro každý uzel u a každé $1 \leq i, j \leq k$, kde $i \neq j$;
- $B_{u,i} \to \neg B_{v,i}$ pro každé $(u, v) \in H$ a $1 \leq i \leq k$.

Platí následující pozorování:

- Graf $\mathcal{G}$ je k-obarvitelný právě když soubor T je splnitelný.
- Každý konečný podgraf $\mathcal{G}$ je k-obarvitelný právě když každý konečný podsoubor T je splnitelný.

Nyní stačí aplikovat *větu 30*. □

V této části se soustředíme na $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$. Uvažme následující odvozovací systém pro $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$ (Lukasiewicz, 1928):

Schémata axiómů:

- A1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- A2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi))$
- A3: $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Odvozovací pravidlo:

- MP: Z φ a $\varphi \rightarrow \psi$ odvoď ψ. (modus ponens)

Definice 32. *Buď* T *soubor formulí.*

- *Důkaz formule* ψ *z předpokladů* T *je konečná posloupnost formulí* $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$*, kde* φ_k *je* ψ *a pro každé* φ_i*, kde* $1 \leq i \leq k$*, platí alespoň jedna z následujících podmínek:*
  - φ_i *je prvek* T*;*
  - φ_i *je instancí jednoho ze schémat A1–A3;*
  - φ_i *vznikne aplikací pravidla MP na formule* φ_m, φ_n *pro vhodné* $1 \leq m, n < i$.
- *Formule* ψ *je dokazatelná z předpokladů* T*, psáno* $T \vdash \psi$*, jestliže existuje důkaz* ψ *z předpokladů* T*. Jestliže* $T \vdash \psi$ *pro prázdné* T*, říkáme že* ψ *je dokazatelná a píšeme* $\vdash \psi$.

Příklad 33. *Pro libovolnou formuli* φ *platí* $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Důkaz. Následující posloupnost formulí je důkazem $\varphi \rightarrow \varphi$.

1)	$(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	A2
2)	$\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$	A1
3)	$(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	MP na 2), 1)
4)	$\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	A1
5)	$\varphi \rightarrow \varphi$	MP na 4), 3)

$\square$

Příklad 34. *Pro libovolné formule* φ, ψ *platí* $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$.

Důkaz. Následující posloupnost formulí je důkazem ψ z $\{\varphi, \neg\varphi\}$:

1)	$\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	$A1$
2)	$\neg\varphi$	předpoklad
3)	$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	MP na 2), 1)
4)	$(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	$A3$
5)	$\varphi \rightarrow \psi$	MP na 3), 4)
6)	φ	předpoklad
7)	ψ	MP na 6), 5)

$\square$

Věta 35 (o dedukci). *Nechť* φ, ψ *jsou formule a* T *soubor formulí. Pak* $T \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ *právě když* $T \vdash \psi \to \varphi$.

Důkaz.
„⇐“: Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz formule $\psi \to \varphi$ z předpokladů T. Pak $\xi_1, \cdots, \xi_k, \psi, \varphi$ je důkaz formule φ z předpokladů $T \cup \{\psi\}$ (poslední formule vznikne aplikací MP na ψ a ξ_k).

„⇒“: Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz φ z předpokladů $T \cup \{\psi\}$. Metaindukcí k j dokážeme, že $T \vdash \psi \to \xi_j$ pro každé $1 \leq j \leq k$.

- $j = 1$. Je-li ξ_1 instance axiómu nebo formule z T, platí $T \vdash \xi_1$. K důkazu ξ_1 z T nyní připojíme formule $\xi_1 \to (\psi \to \xi_1)$, $\psi \to \xi_1$. První formule je instancí A1, druhá aplikací MP na ξ_1 a první formuli. Máme tedy důkaz $\psi \to \xi_1$ z T.

  Je-li ξ_1 formule ψ, platí $T \vdash \psi \to \psi$ podle příkladu 33.

- *Indukční krok:* Je-li formule ξ_j instancí axiómu nebo prvek $T \cup \{\psi\}$, postupujeme stejně jako výše (místo ξ_1 použijeme ξ_j).

  Je-li ξ_j výsledkem aplikace MP na ξ_m, ξ_n, kde $1 \leq m, n < j$, je ξ_n tvaru $\xi_m \to \xi_j$. Podle I.P. navíc platí $T \vdash \psi \to \xi_m$ a $T \vdash \psi \to (\xi_m \to \xi_j)$. Důkazy $\psi \to \xi_m$ a $\psi \to (\xi_m \to \xi_j)$ z T nyní zřetězíme za sebe a připojíme následující formule:

  → $(\psi \to (\xi_m \to \xi_j)) \to ((\psi \to \xi_m) \to (\psi \to \xi_j))$

  → $(\psi \to \xi_m) \to (\psi \to \xi_j)$

  → $\psi \to \xi_j$

  První formule je instancí A2, další dvě vzniknou aplikací MP. Máme tedy důkaz formule $\psi \to \xi_j$ z T.

$\square$

Věta 36 (o korektnosti)**.** *Nechť* φ *je formule a* T *soubor formulí. Jestliže* $T \vdash \varphi$, *pak* $T \models \varphi$.

Důkaz. Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz φ z T. Indukcí vzhledem k j dokážeme, že $T \models \xi_j$ pro každé $1 \leq j \leq k$. (Stačí ověřit, že každá instance A1–A3 je tautologie, a že jestliže $T \models \psi$ a $T \models \psi \to \xi$, pak také $T \models \xi$). $\square$

Lema 37. *Nechť* φ, ψ *jsou formule. Pak*

(a) $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

(b) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

(c) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

(d) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

(e) $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi))$

(f) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$

Důkaz.

- (a): Podle *příkladu 34* platí $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$, proto $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ opakovaným užitím věty o dedukci.

➠ (b): Platí

1)	$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	podle (a)
2)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	věta o dedukci
3)	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	$A3$
4)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	MP na $2), 3)$
5)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	věta o dedukci
6)	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	věta o dedukci

➠ (c): Platí

1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	podle (b)
2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	$A3$
3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	MP na $1), 2)$

- (d): Platí

1)	$\{\varphi \to \psi\} \vdash \varphi \to \psi$	
2)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	podle (b) a věty o dedukci
3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi$	MP na $2), 1)$
4)	$\vdash \psi \to \neg\neg\psi$	podle (c)
5)	$\{\varphi \to \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$	MP na $3), 4)$
6)	$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	věta o dedukci
7)	$\vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	$A3$
8)	$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	MP na $6), 7)$
9)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	věta o dedukci

➠ (e): Platí

1)	$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$	
2)	$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$	věta o dedukci
3)	$\vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	podle (d)
4)	$\{\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$	MP na $2), 3)$
5)	$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	věta o dedukci

➠ (f): Platí

1)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi))$	podle (d)
2)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$	2x MP na 1)
3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \psi$	MP na 2), $\neg\varphi \to \psi$
4)	$\{\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \psi$	věta o dedukci
5)	$\vdash \neg\psi \to (\neg\psi \to \neg(\neg\psi \to \psi))$	podle (e)
6)	$\{\neg\psi\} \vdash \neg(\neg\psi \to \psi)$	2x věta o dedukci
7)	$\vdash \neg\psi \to \neg(\neg\psi \to \psi)$	věta o dedukci
8)	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\neg\psi \to \psi)) \to ((\neg\psi \to \psi) \to \psi)$	A3
9)	$\vdash (\neg\psi \to \psi) \to \psi$	MP na 7), 8)
10)	$\{\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \psi$	MP na 4), 9)
11)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$	2x věta o dedukci

□

Definice 38. *Nechť v je valuace a φ formule. Jestliže $v(\varphi) = 1$, označuje symbol φ^v formuli φ. Jinak φ^v označuje formuli $\neg\varphi$.*

Lema 39 (A. Church)**.** *Nechť v je valuace, φ formule, a $\{X_1, \cdots, X_k\}$ konečný soubor výrokových proměnných, kde všechny proměnné vyskytující se ve φ jsou mezi $\{X_1, \cdots, X_k\}$. Pak $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \varphi^v$.*

Důkaz. Indukcí k délce vytvořující posloupnosti pro φ.

- Je-li $\varphi = X$, pak X je mezi $\{X_1, \cdots, X_k\}$ a tedy $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash X^v$.
- Je-li $\varphi = \neg\psi$, kde $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi^v$, rozlišíme dvě možnosti:
  - $v(\psi) = 0$. Pak $\psi^v = \neg\psi$ a $\varphi^v = \neg\psi$, není co dokazovat.
  - $v(\psi) = 1$. Pak $\psi^v = \psi$ a $\varphi^v = \neg\neg\psi$. Podle *lematu 37 (c)* platí $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$, proto $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg\neg\psi$ užitím MP.

➠ Je-li $\varphi = \psi \rightarrow \xi$, kde $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi^v$ a $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \xi^v$ rozlišíme následující možnosti:

→ $v(\psi \rightarrow \xi) = 1$. Máme tedy dokázat, že $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi \rightarrow \xi$.

- Jestliže $v(\psi) = 0$, platí $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg\psi$. Podle *lematu 37 (a)* dále platí $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)$, proto $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi \rightarrow \xi$ užitím MP.
- Jestliže $v(\xi) = 1$, platí $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \xi$. Podle A1 platí $\vdash \xi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)$, proto $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi \rightarrow \xi$ užitím MP.

→ $v(\psi \rightarrow \xi) = 0$. Pak $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \psi$ a $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg\xi$. Máme dokázat, že $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \xi)$. Podle *lematu 37 (e)* platí $\vdash \psi \rightarrow (\neg\xi \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \xi))$, proto $\{X_1^v, \cdots, X_k^v\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \xi)$ opakovaným užitím MP.

□

Věta 40 (o úplnosti). *Nechť* φ *je formule a* T *soubor formulí. Jestliže* $T \models \varphi$, *pak* $T \vdash \varphi$.

Důkaz. Nejprve uvážíme případ, kdy T je *prázdný* soubor. Nechť φ je tautologie a $X_1, \cdots, X_k$ všechny výrokové proměnné, které se ve φ vyskytují.

- Podle Churchova lematu platí $\{X_1^\nu, \cdots, X_k^\nu\} \vdash \varphi$ pro *libovolnou* valuaci ν.
- Ukážeme, že všechny X_i^ν lze postupně „eliminovat“, až dostaneme důkaz φ z prázdného souboru formulí.

Předpoládejme, že pro dané $0 \leq n < k$ jsme již prokázali, že

$$\{X_1^\nu, \cdots, X_n^\nu, X_{n+1}^\nu\} \vdash \varphi$$

pro *libovolnou* valuaci ν. Dokážeme, že pak také $\{X_1^u, \cdots, X_n^u\} \vdash \varphi$ pro libovolnou valuaci u.

Buď tedy u libovolná valuace. Nechť u_1, u_2 jsou valuace definované takto: $u_1(X_k) = 1$, $u_2(X_k) = 0$, a pro každé $Y \neq X_k$ platí $u_1(Y) = u_2(Y) = v(Y)$. Platí

1)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u, X_{n+1}\} \vdash \varphi$	předpoklad pro $v = u_1$
2)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u, \neg X_{n+1}\} \vdash \varphi$	předpoklad pro $v = u_2$
3)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u\} \vdash X_{n+1} \rightarrow \varphi$	věta o dedukci na 1)
4)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u\} \vdash \neg X_{n+1} \rightarrow \varphi$	věta o dedukci na 2)
5)	$\vdash (X_{n+1} \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\neg X_{n+1} \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$	podle *lematu 37 (f)*
6)	$\{X_1^u, \cdots, X_n^u\} \vdash \varphi$	2x MP na 5) s využitím 3), 4)

Nyní uvážíme obecný případ. Buď T *libovolný* soubor formulí a φ formule taková, že $T \models \varphi$. Podle věty o kompaktnosti existuje konečný soubor $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ formulí z T takový, že $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \models \varphi$. Lehce se ověří, že

$$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\psi_3 \to \cdots (\psi_n \to \varphi) \cdots)$$

Podle předchozího bodu tedy platí

$$\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\psi_3 \to \cdots (\psi_n \to \varphi) \cdots)$$

Po n aplikacích věty o dedukci dostáváme $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \vdash \varphi$, tedy také $T \vdash \varphi$. $\square$

- Výroková logika byla nebyla rozvíjena samostatně, ale jako součást složitějších formálních systémů.
- *Gottlob Frege* (1848–1925) položil základy predikátové logiky a zavedl „moderní“ odvozovací systém. „Výrokový fragment“ tohoto systému vypadá takto (verze z roku 1879):
  - 1: $P \to (Q \to P)$
  - 2: $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
  - 3: $(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$
  - 4: $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$
  - 5: $\neg\neg P \to P$
  - 6: $P \to \neg\neg P$
  - Odvozovací pravidla: MP a substituce

  Fregeho výsledky byly vědeckou komunitou ignorovány zhruba 20 let.

- Giuseppe Peano (1858-1932) doporučil na mezinárodním matematickém kongresu v Paříži (rok 1900) mladému *Bertrandu Russellovi* (1872-1970) studovat Fregeho práce. Russell v roce 1901 objevil inkonzistenci ve Fregeho systému (Russelův paradox), současně plně docenil Fregeho myšlenky. V letech 1910-1913 byla publikována třídílná *Principia Mathematica* (autoři Whitehead, Russel). Tato monografie měla hluboký vliv na vývoj logiky v následujících desetiletích. Věnována byla Fregemu. Pro fragment výrokové logiky byly použity následující axiómy a odvozovací pravidla:
  - 1: $(P \vee P) \to P$
  - 2: $Q \to (P \vee Q)$
  - 3: $(P \vee Q) \to (Q \vee P)$
  - 4: $(P \vee (Q \vee R)) \to (Q \vee (P \vee R))$
  - 5: $(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R))$
  - Odvozovací pravidla: MP a substituce

- V roce 1917 nalezl Jean Nicod následující zjednodušení axiomatického systému z *Principia Mathematica*:
  - 1: $(P \vee P) \rightarrow P$
  - 2: $P \rightarrow (P \vee Q)$
  - 4: $(P \vee (Q \vee R)) \rightarrow (Q \vee (P \vee R))$
  - 5: $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$
  - Odvozovací pravidla: MP a substituce
- Ve stejném roce publikoval Henry Sheffer následující axiomatický systém založený na Shefferově operátoru:
  - Axióm: $(P|(Q|R))|((S|(S|S))|((U|Q)|((P|U)|(P|U))))$
  - Odvozovací pravidla: substituce a „z F a $F|(G|H)$ odvoď H“

- David Hilbert (1862–1943) a Wilhelm Ackermann (1896-1962) publikovali v roce 1928 následující systém:
  - 1: $(P \vee P) \rightarrow P$
  - 2: $P \rightarrow (P \vee Q)$
  - 4: $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$
  - 5: $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$
  - Odvozovací pravidla: MP a substituce
- V roce 1927 navrhl John von Neumann (1903-1957) aplikovat substituci pouze na axiómy. Vznikly systémy založené na *schématech axiómů*.
- Jan Lukasiewicz (1878–1956) prezentoval svůj odvozovací systém (použitý v přednášce) v roce 1928.

- Další odvozovací systémy:
  - V roce 1947 zjednodušili Götling a Rasiowa systém z *Principia Mathematica* do následující podoby:
    - 1: $(P \vee P) \longrightarrow P$
    - 2: $P \longrightarrow (P \vee Q)$
    - 3: $(Q \longrightarrow R) \longrightarrow ((P \vee Q) \longrightarrow (P \vee R))$
    - Odvozovací pravidla: MP a substituce
  - V roce 1953 prezentoval Meredith systém s jediným schématem a jediným odvozovacím pravidlem:
    - Schéma axiómu:
      $((((\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (\neg\rho \longrightarrow \neg\xi)) \longrightarrow \rho) \longrightarrow \gamma) \longrightarrow ((\gamma \longrightarrow \varphi) \longrightarrow (\xi \longrightarrow \varphi))$
    - Odvozovací pravidlo: MP

PREDIKÁTOVÁ LOGIKA. *Vznik a vývoj.*

- *Predikátová logika* (také *logika prvního řádu*) se opírá o pojem *vlastnosti* (tj. *predikátu*). Umožňuje formulovat tvrzení o vlastnostech objektů s využitím *kvantifikátorů*.
- Např. Aristotelova logika je z dnešního pohledu fragmentem predikátové logiky.
- Formule prvního řádu byly součástí Fregeho systému, později se objevily ve 3. dílu Schröderovy monografie *Algebra der Logik* (1910) a monografii *Principia Mathematica* (Whitehead, Russel).
- Logika prvního řádu byla definována jako samostatný systém až v monografii Hilberta a Ackermanna *Grundzügen der theoretischen Logik* (1928).

Definice 41. *Jazyk (stejně jako jazyk s rovností) je systém predikátových symbolů a funkčních symbolů, kde u každého symbolu je dána jeho četnost (arita), která je nezáporným celým číslem.*

Poznámka 42.

- *Predikáty arity nula v jistém smyslu odpovídají výrokovým proměnným, funkční symboly arity nula jsou symboly pro konstanty.*
- *Predikátovým a funkčním symbolům se také říká mimologické symboly. Jazyk je tedy plně určen mimologickými symboly.*
- *Rozdíl mezi jazykem a jazykem s rovností se projeví v tom, že do predikátové logiky pro jazyk s rovností přidáme speciální logický symbol* $=$ *jehož sémantika bude definována speciálním způsobem.*

Příklad 43.

- *Jazyk teorie množin je jazykem s rovností, který obsahuje jeden predikátový symbol $\in$ arity 2.*
- *Jazyk teorie pologrup je jazykem s rovností, který obsahuje jeden funkční symbol „$\cdot$“ arity 2.*

Definice 44. *Abecedu predikátové logiky pro jazyk $\mathcal{L}$ tvoří následující symboly:*

- *Znaky pro proměnné $x, y, z, \ldots$, kterých je spočetně mnoho*
- *Mimologické symboly, tj. predikátové a funkční symboly jazyka $\mathcal{L}$.*
- *Je-li $\mathcal{L}$ jazyk s rovností, obsahuje abeceda speciální znak $=$ pro rovnost.*
- *Logické spojky $\rightarrow$ a $\neg$.*
- *Symbol $\forall$ pro univerzální kvantifikátor.*
- *Závorky $($ a $)$.*

Definice 45. *Termem jazyka $\mathcal{L}$ je slovo t nad abecedou predikátové logiky pro jazyk $\mathcal{L}$, pro které existuje vytvořující posloupnost slov $t_1, \cdots, t_k$, kde $k \geq 1$, t_k je t, a pro každé $1 \leq i \leq k$ má slovo t_i jeden z následujících tvarů:*

- *proměnná,*
- $f(t_{i_1}, \cdots, t_{i_n})$, *kde $1 \leq i_1, \cdots, i_n < k$, f je funkční symbol jazyka $\mathcal{L}$, a n je arita f.*

Term je uzavřený, jestliže neobsahuje proměnné.

Poznámka 46. *U binárních funkčních symbolů (a později také predikátů) dovolíme pro větší čitelnost infixový zápis. U funkčních (a predikátových) symbolů arity nula budeme psát c místo $c()$.*

Příklad 47.

- $(x \cdot y) \cdot z$ *je termem jazyka pologrup (v prefixové notaci $\cdot(\cdot(x, y), z)$)*
- $0 + (S(0) + S(S(0)))$ *je termem jazyka $0, S, +$, kde 0, S a $+$ jsou po řadě*

funkční symboly arity nula, jedna a dva.

Definice 48. *Formule predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ je slovo φ nad abecedou predikátové logiky pro jazyk $\mathcal{L}$, pro které existuje vytvořující posloupnost slov $\psi_1, \cdots, \psi_k$, kde $k \geq 1$, ψ_k je φ, a pro každé $1 \leq i \leq k$ má slovo ψ_i jeden z následujících tvarů:*

- $P(t_1, \cdots, t_n)$, *kde P je predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}$ arity n a $t_1, \cdots, t_n$ jsou termy jazyka $\mathcal{L}$.*
- $t_1 = t_2$, *je-li $\mathcal{L}$ jazyk s rovností a t_1, t_2 jsou termy jazyka $\mathcal{L}$.*
- $\neg\psi_j$ *pro nějaké $1 \leq j < i$,*
- $(\psi_j \to \psi_{j'})$ *pro nějaká $1 \leq j, j' < i$,*
- $\forall x\, \psi_j$, *kde x je proměnná a $1 \leq j < i$.*

Poznámka 49. *Ve zbytku přednášky budeme používat následující „zkratky“:*

- $\exists x\, \varphi$ *značí* $\neg \forall x \neg \varphi$
- $\varphi \vee \psi$ *značí* $\neg \varphi \rightarrow \psi$
- $\varphi \wedge \psi$ *značí* $\neg(\varphi \rightarrow \neg \psi)$.
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ *značí* $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, *kde symbol* $\wedge$ *dále „rozvineme“ podle předchozího bodu.*

Příklady formulí:

- $\forall x\, P(x, y) \wedge \exists x\, (P(x, x) \vee Q(c))$
- $\forall x\, \exists x\, (P(x, x) \vee \forall y\, \forall x\, Q(x))$

Definice 50. *Každý výskyt proměnné ve formuli predikátového počtu je buď volný nebo vázaný podle následujícího induktivního předpisu:*

- *Ve formuli tvaru $P(t_1, \cdots, t_n)$ jsou všechny výskyty proměnných volné.*
- *Výrokové spojky nemění charakter výskytů proměnných, tj. je-li daný výskyt proměnné ve formuli ψ volný (resp. vázaný), je odpovídající výskyt ve formulích $\neg\psi$, $\varphi \to \psi$, $\psi \to \varphi$ rovněž volný (resp. vázaný).*
- *Ve formuli $\forall x\, \psi$ je každý výskyt proměnné x (včetně výskytu za kvantifikátorem) vázaný; byl-li výskyt proměnné různé od x volný (resp. vázaný) ve formuli ψ, je odpovídající výskyt ve formuli $\forall x\, \psi$ rovněž volný (resp. vázaný).*

Příklady (volné výskyty jsou *červené*):

- $\forall x\, P(x, y) \vee \forall y\, P(x, y)$
- $\forall x\, (P(x, y) \vee \forall y\, P(x, y))$

Definice 51.

- *Proměnná se nazývá volnou (resp. vázanou) ve formuli, má-li v ní volný (resp. vázaný) výskyt.*
- *Formule je otevřená, jestliže v ní žádná proměnná nemá vázaný výskyt.*
- *Formule je uzavřená (také sentence), jestliže v ní žádná proměnná nemá volný výskyt.*
- *Zápis $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ značí, že všechny volné proměnné ve formuli φ jsou mezi $x_1, \cdots, x_n$ (nemusí nutně platit, že každá z těchto proměnných je volná ve φ).*
- *Univerzální uzávěr formule φ je formule tvaru $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \varphi$, kde $x_1, \cdots, x_n$ jsou právě všechny volné proměnné formule φ.*

Definice 52. *Term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, jestliže žádný výskyt proměnné v termu t se nestane vázaným po provedení substituce termu t za každý volný výskyt proměnné x ve formuli φ. Je-li t substituovatelný za x ve φ, značí zápis $\varphi(x/t)$ formuli, která vznikne nahrazením každého volného výskytu x ve φ termem t.*

Příklady:

- Term $y + 3$ je substituovatelný za x ve formuli $\exists z\, x{+}y{=}z$
- Term $y + z$ není substituovatelný za x ve formuli $\exists z\, x{+}y{=}z$
- $(P(x, y) \ \wedge \ \forall x\, P(x, y))(x/3)$ je formule $P(3, y) \ \wedge \ \forall x\, P(x, y)$
- $P(x, y)(x/y)(y/x)$ je formule $P(x, x)$

Definice 53. *Nechť* φ *je formule a* $t_1, \cdots, t_n$ *termy, které jsou v uvedeném pořadí substituovatelné za proměnné* $x_1, \cdots, x_n$ *ve* φ *(předpokládáme, že* $x_1, \cdots, x_n$ *jsou různé). Symbol* $\varphi(x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n)$ *značí formuli, která vznikne „simultánním nahrazením“ každého volného výskytu* x_i *termem* t_i *pro každé* $1 \leq i \leq n$*. Přesněji,* $\varphi(x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n)$ *je formule* $\varphi(x_1/z_1) \cdots (x_n/z_n)(z_1/t_1) \cdots (z_n/t_n)$*, kde* $z_1, \cdots, z_n$ *jsou (různé) proměnné, které se nevyskytují v* $t_1, \cdots, t_n$ *ani mezi* $x_1, \cdots, x_n$*.*

Příklad:

- $P(x, y)(x/y, y/x)$ je formule $P(y, x)$

Definice 54. *Realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ je zadána*

- *neprázdným souborem M, nazývaným univerzem (případně nosičem). Prvky univerza nazýváme individui.*
- *přiřazením, které každému n-árnímu predikátovému symbolu P přiřadí n-ární relaci P_M na M*
- *přiřazením, které každému m-árnímu funkčnímu symbolu přiřadí funkci $f_M : M^m \to M$.*

Ohodnocení je zobrazení přiřazující proměnným prvky univerza M.

Definice 55. *Realizaci termu t při ohodnocení e v relizaci $\mathcal{M}$, psáno $t^{\mathcal{M}}[e]$ (případně jen $t[e]$ je-li $\mathcal{M}$ jasné z kontextu), definujeme induktivně takto:*

- $x[e] = e(x)$
- $f(t_1, \cdots, t_m)[e] = f_M(t_1[e], \cdots, t_m[e])$
  (pro $m = 0$ je na pravé staně uvedené definující rovnosti $f_M(\emptyset)$).

Definice 56 (A. Tarski). *Buď $\mathcal{M}$ realizace jazyka $\mathcal{L}$, e ohodnocení a φ formule predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Ternární vztah $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ definujeme indukcí ke struktuře φ:*

- $\mathcal{M} \models P(t_1, \cdots, t_m)[e]$ *právě když* $(t_1[e], \cdots, t_m[e]) \in P_{\mathcal{M}}$.
- *Jestliže $\mathcal{L}$ je jazyk s rovností, definujeme* $\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)[e]$ *právě když* $t_1[e]$ *a* $t_2[e]$ *jsou stejná individua.*
- $\mathcal{M} \models \neg\psi[e]$ *právě když není* $\mathcal{M} \models \psi[e]$.
- $\mathcal{M} \models (\psi \to \xi)[e]$ *právě když* $\mathcal{M} \models \xi[e]$ *nebo není* $\mathcal{M} \models \psi[e]$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\, \psi[e]$ *právě když* $\mathcal{M} \models \psi[e(x/a)]$ *pro každý prvek* a *univerza* M.

Jestliže $\mathcal{M} \models \varphi[e]$, říkáme, že φ je pravdivá v $\mathcal{M}$ při ohodnocení e. Jestliže $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ pro každé e, je φ pravdivá v $\mathcal{M}$, psáno $\mathcal{M} \models \varphi$.

Příklad 57. *Buď* $\mathcal{L}$ *jazyk s jedním unárním predikátem* P *a* $\mathcal{M}$ *jeho realizace nad univerzem* $M = \{a, b\}$, *kde* $P_M = \{a\}$. *Pak*

- *Platí* $\mathcal{M} \models \exists x\, (P(x) \rightarrow (P(x) \wedge \neg P(x)))$
- *Neplatí* $\mathcal{M} \models P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$
- *Neplatí* $\mathcal{M} \models (\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, \neg P(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \rightarrow \neg P(x))$

Definice 58. *Buď $\mathcal{L}$ jazyk (příp. jazyk s rovností).*

- *Teorie (s jazykem $\mathcal{L}$) je soubor T formulí predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Prvky T se nazývají axiómy teorie T.*
- *Realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ je model teorie T, psáno $\mathcal{M} \models \mathsf{T}$, jestliže $\mathcal{M} \models \varphi$ pro každé φ z T.*
- *Teorie je splnitelná, jestliže má model.*
- *Je-li $\mathcal{M}$ realizace jazyka $\mathcal{L}$, pak $Th(\mathcal{M})$ označuje teorii tvořenou právě všemi uzavřenými formulemi, které jsou v $\mathcal{M}$ pravdivé.*
- *Formule φ je sémantickým důsledkem teorie T, psáno $\mathsf{T} \models \varphi$, jestliže φ je pravdivá v každém modelu teorie T.*

Příklad 59. *Uvažme jazyk s rovností obsahující jeden binární funkční symbol "$\cdot$" a jednu konstantu* 1. *Nechť* T *je tvořena následujícími formulemi:*

- $\forall x \forall y \forall z \;\; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $\forall x \;\; (x \cdot 1 = x) \wedge (1 \cdot x = x)$
- $\forall x \exists y \;\; (x \cdot y = 1) \wedge (y \cdot x = 1)$

Pak formule $\forall x \forall y \;\; (x \cdot y) = (y \cdot x)$ *není sémantickým důsledkem* T, *zatímco formule* $x \cdot (1 \cdot y) = (1 \cdot x) \cdot y$ *ano.*

- Schémata *výrokových axiómů*:
  - P1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  - P2: $(\varphi \to (\psi \to \xi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi))$
  - P3: $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
- Schéma *axiómu specifikace*:
  - P4: $\forall x\, \varphi \to \varphi(x/t)$, kde t je substituovatelný za x ve φ.
- Schéma *axiómu distribuce*:
  - P5: $(\forall x\, (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \forall x\, \psi)$, kde x nemá volný výskyt ve φ.
- Odvozovací pravidla:
  - MP: Z φ a $\varphi \to \psi$ odvoď ψ. (*modus ponens*)
  - GEN: Z φ odvoď $\forall x\, \varphi$. (*generalizace*)

Je-li $\mathcal{L}$ jazyk s rovností, přidáme dále následující *axiómy rovnosti*:

- R1: $x = x$
- R2: $(x_1{=}y_1 \wedge \cdots \wedge x_n{=}y_n \wedge P(x_1, \cdots, x_n)) \rightarrow P(y_1, \cdots, y_n)$,
  kde P je predikátový symbol arity n.
- R3: $(x_1{=}y_1 \wedge \cdots \wedge x_m{=}y_m) \rightarrow (f(x_1, \cdots, x_m){=}f(y_1, \cdots, y_m))$,
  kde f je funkční symbol arity m.

Definice 60. *Buď T teorie jazyka $\mathcal{L}$.*

- *Důkaz formule ψ v teorii T je konečná posloupnost formulí $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, kde φ_k je ψ a pro každé φ_i, kde $1 \leq i \leq k$, platí alespoň jedna z následujících podmínek:*
  - → φ_i *je prvek T;*
  - → φ_i *je instancí jednoho ze schémat P1–P5;*
  - → $\mathcal{L}$ *je jazyk s rovností a φ_i je instancí jednoho ze schémat R1–R3;*
  - → φ_i *vznikne aplikací pravidla MP na formule φ_m, φ_n pro vhodné $1 \leq m, n < i$.*
  - → φ_i *vznikne aplikací pravidla GEN na formuli φ_m pro vhodné $1 \leq m < i$.*

- *Formule* ψ *je* *dokazatelná* *v teorii* T, *psáno* $T \vdash \psi$, *jestliže existuje důkaz* ψ *v* T. *Jestliže* $T \vdash \psi$ *pro prázdné* T, *říkáme že* ψ *je* *dokazatelná* *a píšeme* $\vdash \psi$.
- *Formule* ψ *je* *vyvratitelná* *v teorii* T, *jestliže* $T \vdash \neg\psi$
- *Teorie* T *je* *sporná* *(též* *inkonzistentní*), *jestliže každá formule predikátové logiky jazyka* $\mathcal{L}$ *je v* T *dokazatelná.*
- *Teorie je* *bezesporná* *(též* *konzistentní*), *jestliže není nekonzistentní.*

Poznámka 61 (Princip dosazení do tautologie výrokového počtu). *Je-li* φ *tautologií* $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$, *ve které nahradíme výrokové proměnné formulemi predikátové logiky tak, že daná výroková proměnná je nahrazena vždy* touž *formulí, obdržíme formuli predikátové logiky, která je dokazatelná v odvozovacím systému predikátové logiky pouze pomocí P1–P3 a MP.*

Poznámka 62 (Neplatnost „obecné“ věty o dedukci). *Za předpokladu korektnosti odvozovacího systému pro predikátovou logiku neplatí* $\vdash \varphi \rightarrow \forall x\, \varphi$. *Platí ovšem* $\{\varphi\} \vdash \forall x\, \varphi$. *Proto* obecně neplatí, *že* $T \models \varphi \rightarrow \psi$ *právě když* $T \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Věta 63 (o dedukci). *Nechť T je teorie jazyka $\mathcal{L}$, ψ uzavřená formule jazyka $\mathcal{L}$ a φ (libovolná) formule jazyka $\mathcal{L}$. Pak $T \vdash \psi \to \varphi$ právě když $T \cup \{\psi\} \vdash \varphi$.*

Důkaz.

Důkaz je velmi podobný důkazu *věty 35*:

„$\Rightarrow$“: Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz formule $\psi \to \varphi$ v T. Pak $\xi_1, \cdots, \xi_k, \psi, \varphi$ je důkaz formule φ v $T \cup \{\psi\}$ (poslední formule vznikne aplikací MP na ψ a ξ_k).

„$\Leftarrow$“: Nechť $\xi_1, \cdots, \xi_k$ je důkaz φ v $T \cup \{\psi\}$. Metaindukcí k j dokážeme, že $T \vdash \psi \to \xi_j$ pro každé $1 \leq j \leq k$.

- $j = 1$. Je-li ξ_1 instance axiómu nebo formule z T, platí $T \vdash \xi_1$. K důkazu ξ_1 z T nyní připojíme formule $\xi_1 \to (\psi \to \xi_1)$, $\psi \to \xi_1$. První formule je instancí P1, druhá aplikací MP na ξ_1 a první formuli. Máme tedy důkaz $\psi \to \xi_1$ v T.

  Je-li ξ_1 formule ψ, platí $T \vdash \psi \to \psi$ podle *příkladu 33* a *poznámky 62*.

- *Indukční krok:* Je-li formule ξ_j instancí axiómu nebo prvek $T \cup \{\psi\}$, postupujeme stejně jako výše (místo ξ_1 použijeme ξ_j).
  - Je-li ξ_j výsledkem aplikace MP na ξ_m, ξ_n, kde $1 \leq m, n < j$, je ξ_n tvaru $\xi_m \to \xi_j$. Podle I.P. navíc platí $T \vdash \psi \to \xi_m$ a $T \vdash \psi \to (\xi_m \to \xi_j)$. Důkazy $\psi \to \xi_m$ a $\psi \to (\xi_m \to \xi_j)$ v T nyní zřetězíme za sebe a připojíme následující formule:

    → $(\psi \to (\xi_m \to \xi_j)) \to ((\psi \to \xi_m) \to (\psi \to \xi_j))$

    → $(\psi \to \xi_m) \to (\psi \to \xi_j)$

    → $\psi \to \xi_j$

    První formule je instancí P2, další dvě vzniknou aplikací MP. Máme tedy důkaz formule $\psi \to \xi_j$ v T.

- Je-li ξ_j výsledkem aplikace GEN na ξ_m, kde $1 \leq m < j$, je ξ_j tvaru $\forall x\, \xi_m$. Podle I.P. platí $T \vdash \psi \to \xi_m$. K tomuto důkazu nyní stačí připojit formule
  - $\forall x\, (\psi \to \xi_m)$
  - $\forall x\, (\psi \to \xi_m) \to (\psi \to \forall x\, \xi_m)$
  - $\psi \to \forall x\, \xi_m$.

  První vznikne aplikací GEN, druhá je instancí P5, třetí vznikne aplikací MP. Dostaneme tak důkaz formule $\psi \to \xi_j$ v T.

$\square$

Lema 64. *Pro každé formule φ a ψ platí:*

1. $\vdash (\forall x\,(\varphi \to \psi)) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\,\psi)$, *pokud x není volná ve formuli φ;*
2. $\vdash (\forall x\,(\varphi \to \psi)) \leftrightarrow (\exists x\,\varphi \to \psi)$, *pokud x není volná ve formuli ψ;*
3. $\vdash (\exists x\,(\varphi \to \psi)) \leftrightarrow (\varphi \to \exists x\,\psi)$, *pokud x není volná ve formuli φ;*
4. $\vdash (\exists x\,(\varphi \to \psi)) \leftrightarrow (\forall x\,\varphi \to \psi)$, *pokud x není volná ve formuli ψ.*

Důkaz. Pozorování:

(a) Jestliže $\vdash \varphi \to \psi$ a současně $\vdash \psi \to \varphi$, pak $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. To plyne z toho, že $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$ je výroková tautologie (viz *poznámka 61*).

(b) (tranzitivita implikace). Jestliže $T \vdash \varphi \to \xi$ a současně $T \vdash \xi \to \psi$, pak $T \vdash \varphi \to \psi$. Stačí použít *poznámku 61* a tautologii $(A \to C) \to ((C \to B) \to (A \to B))$.

(c) Nechť $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou formule. Pak $\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$, neboť

1)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	P4
2)	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	výr. tautologie
3)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	tranz. impl. na 1), 2)
4)	$\forall x\,(\varphi \to \psi) \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	věta o dedukci
5)	$\forall x\,(\varphi \to \psi) \vdash \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$	GEN
6)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$	věta o dedukci

Tvrzení 1.–4. teď dokážeme za předpokladu, že $\varphi(x)$ a $\psi(x)$. Obecná podoba vyplyne užitím věty konstantách (viz dále).

1. Platí $\vdash (\forall x\,(\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \forall x\,\psi)$, neboť tato formule je instancí P5. Důkaz opačné implikace vypadá takto:

1)	$\vdash \forall x\,\psi \to \psi$	P4
2)	$\vdash (\forall x\,\psi \to \psi) \to ((\varphi \to \forall x\,\psi) \to (\varphi \to \psi))$	
	$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	
	je tautologie, viz *pozn. 61*	
3)	$\vdash (\varphi \to \forall x\,\psi) \to (\varphi \to \psi)$	MP na 1), 2)
4)	$\varphi \to \forall x\,\psi \vdash \varphi \to \psi$	věta o dedukci
5)	$\varphi \to \forall x\,\psi \vdash \forall x\,(\varphi \to \psi)$	GEN
6)	$\vdash (\varphi \to \forall x\,\psi) \to (\forall x\,(\varphi \to \psi))$	věta o dedukci

2. Nejprve ukážeme, že $\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\exists x\,\varphi \to \psi)$.

1)	$\vdash \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\neg\psi \to \forall x\,\neg\varphi)$	podle 1.
2)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to \forall x\,(\neg\psi \to \neg\varphi)$	podle (c)
3)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi)) \to (\neg\psi \to \forall x\,\neg\varphi)$	tranz. impl. na 2), 1)
4)	$\vdash (\neg\psi \to \forall x\,\neg\varphi) \to (\neg\forall x\,\neg\varphi \to \psi)$	taut. $(\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$
5)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\neg\forall x\,\neg\varphi \to \psi)$	tranz. impl. na 3), 4)
6)	$\vdash \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\exists x\,\varphi \to \psi)$	reformulace

Nyní opačný směr $\vdash (\exists x\, \varphi \to \psi) \to \forall x\, (\varphi \to \psi)$:

1)	$\vdash (\neg\psi \to \forall x \neg\varphi) \to \forall x\, (\neg\psi \to \neg\varphi)$	podle 1.
2)	$\vdash (\neg\forall x \neg\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \forall x \neg\varphi)$	taut. $(\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$
3)	$\vdash (\neg\forall x \neg\varphi \to \psi) \to \forall x\, (\neg\psi \to \neg\varphi)$	tranz. impl. na 1), 2)
4)	$\exists x\, \varphi \to \psi \vdash \forall x\, (\neg\psi \to \neg\varphi)$	věta o dedukci
5)	$\exists x\, \varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	P4 a MP
6)	$\exists x\, \varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi$	$(\neg A \to \neg B) \to (A \to B)$ a MP
7)	$\exists x\, \varphi \to \psi \vdash \forall x\, (\varphi \to \psi)$	GEN
8)	$\vdash (\exists x\, \varphi \to \psi) \to \forall x\, (\varphi \to \psi)$	věta o dedukci

$\square$

Věta 65. *Nechť T je teorie a φ formule jazyka teorie T. Jestliže $T \vdash \varphi$, pak $T \models \varphi$.*

Důkaz. Stačí ověřit následující tvrzení:

- Je-li ψ instancí jednoho ze schémat P1–P5 (příp. také R1–R3, pokud jazyk teorie T je jazyk s rovností) a $\mathcal{M}$ je model T, pak $\mathcal{M} \models \psi$.
- Je-li $\mathcal{M}$ model T a ψ, ξ formule jazyka teorie T, kde $\mathcal{M} \models \psi$ a $\mathcal{M} \models \psi \to \xi$, pak $\mathcal{M} \models \xi$.
- Je-li $\mathcal{M}$ model T a ψ formule jazyka teorie T, kde $\mathcal{M} \models \psi$, pak $\mathcal{M} \models \forall x\, \psi$.

Metaindukcí vzhledem k i je pak již triviální ukázat, že je-li $\psi_1, \cdots, \psi_k$ důkaz formule φ v T a $\mathcal{M}$ je model T, pak $T \models \psi_i$ pro každé $1 \leq i \leq k$. $\square$

Lema 66. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Pro každou teorii* T *a pro každou formuli* φ *jazyka teorie* T *platí, že jestliže* $T \models \varphi$, *pak* $T \vdash \varphi$.

2. *Každá bezesporná teorie má model.*

Důkaz.

$(1. \Rightarrow 2.)$ Buď T bezesporná teorie. Pak existuje formule φ jazyka teorie T, která není v T dokazatelná (tj. $T \nvdash \varphi$). Obměnou 1. pak ale dostáváme, že φ není sémantickým důsledkem T (tj. $T \not\models \varphi$). To znamená, že existuje takový model T, kde není pravdivá φ. Zejména má tedy T model.

$(2. \Rightarrow 1.)$ Užitím 2. dokážeme obměnu 1. Nechť tedy $T \nvdash \varphi$, a nechť $\overline{\varphi}$ je univerzální uzávěr φ. Ukážeme, že $T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ je bezesporná; pak podle 2. má $T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ model, tedy $T \not\models \varphi$.

$T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ je bezesporná: Předpokládejme naopak, že $T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ je sporná. Pak

1)	$T \cup \{\neg\overline{\varphi}\} \vdash \overline{\varphi}$	$T \cup \{\neg\overline{\varphi}\}$ je sporná
2)	$T \vdash \neg\overline{\varphi} \to \overline{\varphi}$	věta o dedukci
3)	$\vdash (\neg\overline{\varphi} \to \overline{\varphi}) \to \overline{\varphi}$	$(A \to B) \to B$ je tautologie, viz pozn. 62
4)	$T \vdash \overline{\varphi}$	MP na 2), 3)
5)	$T \vdash \varphi$	opakovaně P4 a MP

Obdrželi jsme tedy spor s tím, že $T \nvdash \varphi$.

$\square$

Cílem dalšího postupu je dokázat, že každá bezesporná teorie má model. Tato konstrukce obsahuje dva základní obraty:

- Zavede se pojem *kanonické struktury* pro danou teorii T. Tato struktura obecně *není* modelem T. Ukážeme, že pokud T vyhovuje dalším podmínkám (je *henkinovská* a *úplná*), pak kanonická struktura *je* modelem T.

- Ukážeme, že každou bezespornou teorii je možné vhodným způsobem *rozšířit* tak, aby byla henkinovská a úplná.

Definice 67.

- *Teorie* S *je* *rozšíření* *teorie* T, *jestliže jazyk teorie* S *obsahuje jazyk teorie* T *a v teorii* S *jsou dokazatelné všechny axiómy teorie* T.
- *Rozšíření* S *teorie* T *se nazývá* *konzervativní*, *jestliže každá formule jazyka teorie* T, *která je dokazatelná v* S, *je dokazatelná i v* T.
- *Teorie* S *a* T *jsou* *ekvivalentní*, *jestliže* S *je rozšířením* T *a současně* T *je rozšířením* S.

Věta 68 (o konstantách). *Nechť* S *je rozšíření* T *vzniklé obohacením jazyka teorie* T *o nové navzájem různé konstanty* $c_1, \cdots, c_k$ *(nové axiómy nepřidáváme), a nechť* $x_1, \cdots, x_k$ *jsou navzájem různé proměnné. Pak pro každou formuli* φ *jazyka teorie* T *platí, že* $T \vdash \varphi$ *právě když* $S \vdash \varphi(x_1/c_1, \cdots, x_k/c_k)$.

Důkaz. Jelikož $c_1, \cdots, c_k$ jsou navzájem různé, stačí dokázat, že $T \vdash \varphi$ právě když $S \vdash \varphi(x/c)$.

$\Rightarrow$: K důkazu φ v T připojíme formule $\forall x\, \varphi$, $\quad \forall x\, \varphi \to \varphi(x/c)$, $\quad \varphi(x/c)$ a obdržíme tak důkaz formule $\varphi(x/c)$ v S.

$\Leftarrow$: Nechť $\psi_1, \cdots, \psi_k$ je důkaz $\varphi(x/c)$ v S. Nechť y je proměnná, která se nevyskytuje v tomto důkazu. Indukcí k i ukážeme, že pro každé $1 \leq i \leq k$ je $\psi_1(c/y), \cdots, \psi_i(c/y)$ důkaz v T. Rozlišíme tyto možnosti:

- Je-li ψ_i instancí P1–P5 (příp. R1–R3), je také $\psi_i(c/y)$ instancí téhož schématu.

- Je-li ψ_i axióm teorie T, pak se v ψ_i nevyskytuje c a formule ψ_i a $\psi_i(c/y)$ jsou tedy totožné.

- Jestliže ψ_i vyplývá z ψ_j a ψ_m pomocí MP, je ψ_m tvaru $\psi_j \rightarrow \psi_i$ a formule $\psi_m(c/y)$ je tedy formulí $\psi_j(c/y) \rightarrow \psi_i(c/y)$. Takže formule $\psi_i(c/y)$ vyplývá z $\psi_j(c/y)$ a $\psi_m(c/y)$ pomocí MP.

- Jestliže ψ_i vyplývá z ψ_j pomocí GEN, je ψ_i tvaru $\forall x\, \psi_j$. Stačí si uvědomit, že $(\forall x\, \psi_j)(c/y)$ je tatáž formule jako $\forall x\, (\psi_j(c/y))$, neboť x a y jsou různé.

Ukázali jsme, že $T \vdash \varphi(x/c)(c/y)$. Dále

1)	$T \vdash \varphi(x/y)$	$\varphi(x/y)$ je totéž co $\varphi(x/c)(c/y)$
2)	$T \vdash \forall y\, \varphi(x/y)$	GEN
3)	$\vdash \forall y\, \varphi(x/y) \rightarrow (\varphi(x/y)(y/x))$	P4
4)	$T \vdash \varphi(x/y)(y/x)$	MP na $2), 3)$
5)	$T \vdash \varphi$	$\varphi(x/y)(y/x)$ je totéž co φ

$\square$

Definice 69.

- *Teorie* T *je* *henkinovská*, *jestliže pro každou formuli* φ *jazyka teorie* T *s jednou volnou proměnnou* x *existuje v jazyce teorie* T *konstanta* c *taková, že* $T \vdash \exists x\, \varphi \to \varphi(x/c)$.
- *Teorie* T *je* *úplná*, *jestliže je bezesporná a pro každou uzavřenou formuli* φ *jejího jazyka platí buď* $T \vdash \varphi$ *nebo* $T \vdash \neg\varphi$.

Věta 70 (o henkinovské konstantě). *Buď* T *teorie a* $\varphi(x)$ *formule jejího jazyka. Je-li* S *rozšíření* T, *které vznikne přidáním nové konstanty* c_φ *a formule* $\exists x\, \varphi \to \varphi(x/c_\varphi)$, *pak* S *je konzervativní rozšíření* T*.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pro libovolnou formuli $\xi(x)$ platí $\vdash \exists x \xi \to \exists y \xi(x/y)$:

1)	$\{\forall y \neg\xi(x/y)\} \vdash \forall y \neg\xi(x/y)$	
2)	$\{\forall y \neg\xi(x/y)\} \vdash \neg\xi(x/y)(y/x)$	P4 a MP
3)	$\{\forall y \neg\xi(x/y)\} \vdash \neg\xi$	přepis
4)	$\{\forall y \neg\xi(x/y)\} \vdash \forall x \neg\xi$	GEN
5)	$\vdash \forall y \neg\xi(x/y) \to \forall x \neg\xi$	dedukce
6)	$\vdash \exists x \xi \to \exists y \xi(x/y)$	taut. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ a MP.

Nechť R značí teorii vzniklou pouhým přidáním konstanty c_φ k T. Nechť ψ je formule jazyka teorie T taková, že $S \vdash \psi$. Nechť y je proměnná, která se nevyskytuje ani ve φ, ani v ψ. Platí:

1)	$S \vdash \psi$	předpoklad
2)	$R \vdash (\exists x\varphi \to \varphi(x/c_\varphi)) \to \psi$	$S = R \cup \{\exists x\varphi \to \varphi(x/c_\varphi)\}$ a dedukce
3)	$T \vdash (\exists x\varphi \to \varphi(x/y)) \to \psi$	věta o konstantách
4)	$T \vdash \forall y((\exists x\varphi \to \varphi(x/y)) \to \psi)$	GEN
5)	$T \vdash \exists y(\exists x\varphi \to \varphi(x/y)) \to \psi$	*lema 64 (2)* a MP
6)	$\vdash (\exists x\varphi \to \exists y\varphi(x/y)) \to \exists y(\exists x\varphi \to \varphi(x/y))$	*lema 64 (3)*
7)	$T \vdash (\exists x\varphi \to \exists y\varphi(x/y)) \to \psi$	tranz. implikace
8)	$\vdash \exists x\varphi \to \exists y\varphi(x/y)$	dokázáno výše
9)	$T \vdash \psi$	MP

$\square$

Věta 71 (o henkinovském rozšíření). *Ke každé teorii existuje henkinovská teorie, která je jejím konzervativním rozšířením.*

Důkaz. Buď T (libovolná) teorie. Pro každé $n \geq 0$ definujeme teorii T_n takto:

- $T_0 = T$. Teorie T_{i+1} vznikne z T_i tak, že pro každou formuli $\varphi(x)$ jazyka teorie T_i přidáme novou konstantu c_φ a formuli $\exists x \varphi \to \varphi(x/c_\varphi)$.

Metaindukcí vzhledem k n ukážeme, že T_n je konzervativní rozšíření T.

- Pro $n = 0$ není co dokazovat. V indukčním kroku si stačí uvědomit, že je-li $T_{i+1} \vdash \psi$, může být v důkazu formule ψ použito jen *konečně mnoho* axiómů $\xi_1, \cdots, \xi_k$, které nepatří do T_i. Užitím věty o henkinovské konstantě k-krát po sobě dostáváme $T_i \vdash \psi$, proto $T \vdash \psi$ podle I.P.

Uvažme teorii $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. Teorie S je konzervativní rozšíření T, neboť každý důkaz v S používá jen konečně mnoho axiómů a je tedy důkazem v nějaké T_m. Teorie S je zjevně henkinovská. $\square$

V následující větě předpokládáme existenci *dobrého* uspořádání na souboru všech uzavřených formulí daného jazyka. Je-li uvažovaný jazyk nespočetný, opírá se tento předpoklad o *axióm výběru*.

Věta 72 (o zúplňování teorií). *Ke každé bezesporné teorii existuje její rozšíření se stejným jazykem, které je úplnou teorií.*

Důkaz. Buď T teorie, a nechť $\preceq$ je *dobré* uspořádání na množině všech uzavřených formulí jazyka teorie T. Pro každou uzavřenou formuli φ jazyka teorie T definujeme teorii T_φ induktivně takto:

- Je-li φ nejmenší prvek v uspořádání $\preceq$, klademe $T_\varphi = T$,
- Jinak $T_\varphi = \begin{cases} \bigcup\limits_{\xi \prec \varphi} T_\xi \cup \{\varphi\} & \text{je-li } \bigcup\limits_{\xi \prec \varphi} T_\xi \cup \{\varphi\} \text{ bezesporná;} \\ \bigcup\limits_{\xi \prec \varphi} T_\xi \cup \{\neg\varphi\} & \text{jinak.} \end{cases}$

Indukcí vzhledem k $\preceq$ dokážeme, že každé T_φ je bezesporné rozšíření T.

- Je-li φ nejmenší prvek v uspořádání $\preceq$, není co dokazovat.
- Indukční krok: Označme symbolem S teorii $\bigcup_{\xi \prec \varphi} T_\xi$.
  - Teorie S je nutně bezesporná. Jinak $S \vdash \psi \wedge \neg\psi$ pro nějakou formuli ψ. Jelikož tento důkaz používá jen konečně mnoho axiómů teorie S, nutně existuje $\xi \prec \varphi$ takové, že T_ξ obsahuje všechny použité axiómy. Proto $T_\xi \vdash \psi \wedge \neg\psi$, což je spor s IP.
  - Je-li $T_\varphi = S \cup \{\varphi\}$, je T_φ bezesporná.
  - Je-li $T_\varphi = S \cup \{\neg\varphi\}$, je teorie $S \cup \{\varphi\}$ sporná. Pokud by byla sporná také teorie $S \cup \{\neg\varphi\}$, platilo by $S \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ a $S \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$, proto i $S \vdash \varphi \to \neg\varphi$ a $S \vdash \neg\varphi \to \varphi$ (užitím věty o dedukci). Z toho dostáváme $S \vdash \psi \wedge \neg\psi$ pro libovolné ψ, neboť $(A \to \neg A) \to ((\neg A \to A) \to (\psi \wedge \neg\psi))$ je výroková tautologie (použijeme 2x MP). Tedy i S je sporná, což je spor s předchozím bodem.

Uvažme teorii U která vznikne sjednocením všech T_φ. Zjevně U je rozšíření T a má stejný jazyk jako T. Pokud by U byla sporná, existoval by důkaz $\psi \wedge \neg\psi$ v U. Tento důkaz využívá pouze konečně mnoho axiómů U, proto $\psi \wedge \neg\psi$ je dokazatelná i v nějaké T_φ, což je spor. $\square$

Definice 73. *Buď* T *teorie, kde jazyk teorie* T *obsahuje alespoň jednu konstantu.* *Kanonická struktura* *teorie* T *je realizace* $\mathcal{M}$ *jazyka teorie* T*, kde*

- *univerzum* M *je tvořeno všemi uzavřenými termy jazyka teorie* T*;*
- *relizace funkčního symbolu* f *arity* n *je funkce* f_M*, která uzavřeným termům* $t_1, \cdots, t_n$ *přiřadí uzavřený term* $f(t_1, \cdots, t_n)$*;*
- *realizace predikátového symbolu* P *arity* m *je predikát* P_M *definovaný takto:* $P_M(t_1, \cdots, t_m)$ *platí právě když* $T \vdash P(t_1, \cdots, t_m)$.

Věta 74 (o kanonické struktuře). *Nechť T je úplná henkinovské teorie, a nechť jazyk teorie T je jazykem bez rovnosti. Pak kanonická struktura teorie T je modelem T.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}$ je kanonická struktura teorie T. Ukážeme, že pro libovolnou formuli φ jazyka teorie T platí následující:

- Jestliže $\hat{\varphi}$ je uzavřená instance formule φ, pak $T \vdash \hat{\varphi}$ právě když $\mathcal{M} \models \hat{\varphi}$.

Jelikož lze (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že prvky T jsou *uzavřené* formule, plyne z výše uvedeného, že $\mathcal{M}$ je model T.

Indukcí ke struktuře φ:

- $\varphi \equiv P(t_1, \cdots, t_n)$. Buď $P(t'_1, \cdots, t'_n)$ libovolná uzavřená instance. Podle definice kanonické struktury $\mathcal{M} \models P(t'_1, \cdots, t'_n)$ právě když $T \vdash P(t'_1, \cdots, t'_n)$.

- $\varphi \equiv \neg\psi$. Buď $\neg\hat{\psi}$ libovolná uzavřená instance. Jelikož $\hat{\psi}$ je uzavřená instance ψ, podle IP platí $T \vdash \hat{\psi}$ právě když $\mathcal{M} \models \hat{\psi}$. Dále $T \vdash \neg\hat{\psi}$ právě když $T \nvdash \hat{\psi}$ (T je bezesporná) právě když $\mathcal{M} \not\models \hat{\psi}$ (IP) právě když $\mathcal{M} \models \neg\hat{\psi}$.
- $\varphi \equiv \psi \to \xi$. Každá uzavřená instance této formule je tvaru $\hat{\psi} \to \hat{\xi}$, kde $\hat{\psi}$ je uzavřená instance ψ a $\hat{\xi}$ je uzavřená instance ξ.
  - → Nechť $T \vdash \hat{\psi} \to \hat{\xi}$. Jelikož $\hat{\psi}$ je uzavřená formule a T je uplná, platí buď $T \vdash \hat{\psi}$ nebo $T \vdash \neg\hat{\psi}$. V prvém případě dále $T \vdash \hat{\xi}$ (MP) a užitím IP celkem dostáváme $\mathcal{M} \models \hat{\psi}$ a $\mathcal{M} \models \hat{\xi}$. Proto také $\mathcal{M} \models \hat{\psi} \to \hat{\xi}$. V druhém případě $T \nvdash \hat{\psi}$ (T je bezesporná), proto $\mathcal{M} \not\models \hat{\psi}$ (IP), tudíž $\mathcal{M} \models \hat{\psi} \to \hat{\xi}$.
  - → Nechť $\mathcal{M} \models \hat{\psi} \to \hat{\xi}$. Pak buď $\mathcal{M} \not\models \hat{\psi}$ nebo $\mathcal{M} \models \hat{\xi}$. V prvém případě $T \nvdash \hat{\psi}$ podle IP, tudíž $T \vdash \neg\hat{\psi}$ neboť T je úplná. Proto $T \vdash \hat{\psi} \to \hat{\xi}$ užitím tautologie $\neg A \to (A \to B)$ a MP. V druhém případě $T \vdash \hat{\xi}$, proto $T \vdash \hat{\psi} \to \hat{\xi}$ užitím tautologie $A \to (B \to A)$ a MP.

- $\varphi \equiv \forall x\, \psi$. Buď $\forall x\, \bar\psi$ libovolná uzavřená instance. Pak $\bar\psi(x)$, jinak by $\forall x\, \bar\psi$ nebyla uzavřená.
  - → Nechť $T \vdash \forall x\, \bar\psi$. Pak pro libovolný uzavřený term t platí $T \vdash \bar\psi(x/t)$ (P4 a MP). Podle IP $\mathcal{M} \models \bar\psi(x/t)$. Jelikož tento argument funguje pro *libovolný* uzavřený term t, platí také $\mathcal{M} \models \forall x\, \bar\psi$.
  - → Nechť $T \nvdash \forall x\, \bar\psi$. Pak také $T \nvdash \forall x \neg\neg\bar\psi$ (kdyby $T \vdash \forall x \neg\neg\bar\psi$, dostaneme dále $T \vdash \neg\neg\bar\psi$ (P4 a MP) a $T \vdash \bar\psi$ (tautologie $\neg\neg A \to A$ a MP), $T \vdash \forall x\, \bar\psi$ (GEN), spor).

    Jelikož $T \nvdash \forall x \neg\neg\bar\psi$, platí $T \vdash \neg\forall x \neg\neg\bar\psi$ neboť T je úplná. Tedy $T \vdash \exists x \neg\bar\psi$. Jelikož T je henkinovská, platí $T \vdash \exists x \neg\bar\psi \to \neg\bar\psi(x/c)$. Tedy $T \vdash \neg\bar\psi(x/c)$ a proto $T \nvdash \bar\psi(x/c)$ neboť T je bezesporná. Podle IP $\mathcal{M} \not\models \bar\psi(x/c)$, tedy $\mathcal{M} \models \neg\bar\psi(x/c)$. Proto $\mathcal{M} \not\models \forall x \bar\psi$.

□

Věta 75. *Nechť T je úplná henkinovské teorie, a nechť jazyk teorie T je jazykem s rovností. Pak T má model.*

Důkaz. Buď S teorie (s jazykem bez rovnosti), která vznikne rozšířením T o nový binární predikátový symbol $=$ a axiomy R1–R3. Symbol $=$ v teorii S je tedy *mimologický* a může být realizován „jakkoliv“. Axiomy R1–R3 jsou v S „normální“ axiómy. Stačí nám ukázat, že S má takový model, kde $=$ je realizován jako identita. Takový model pak jistě bude i modelem T (kde $=$ je chápáno jako logický symbol).

Buď $\mathcal{M}$ kanonická struktura teorie S, a nechť $\sim$ je realizace $=$ v S (tj. $t_1 \sim t_2$ právě když $S \vdash t_1 = t_2$). Dokážeme, že $\sim$ je nutně ekvivalence:

- reflexivita: $S \vdash x{=}x$ (R1), $S \vdash \forall x\, x{=}x$ (GEN), $S \vdash \forall x\, x{=}x \rightarrow t{=}t$ (P4), $S \vdash t{=}t$ (MP). Tedy $t \sim t$.
- symetrie: nechť $s \sim t$, tj. $S \vdash s{=}t$. Platí $S \vdash (x_1{=}y_1 \wedge x_2{=}y_2) \rightarrow (x_1{=}x_2 \rightarrow y_1{=}y_2)$ (R2, $=$ hraje i roli P). Užitím GEN, P4 a MP dostaneme $S \vdash (s{=}t \wedge s{=}s) \rightarrow (s{=}s \rightarrow t{=}s)$. Užitím MP dostaneme $S \vdash t{=}s$.
- Tranzitivita: podobně.

Nyní již můžeme definovat strukturu $\mathcal{O}$ pro jazyk teorie S:

- Nosičem $\mathcal{O}$ jsou třídy rozkladu nosiče $\mathcal{M}$ podle $\sim$.
- Funkční symbol f arity n je realizován takto:

$$f_{\mathcal{O}}([t_1], \cdots, [t_n]) = [f_{\mathcal{M}}(t_1, \cdots, t_n)]$$

- Predikátový symbol P arity m je realizován takto:

$$P_{\mathcal{O}}([t_1], \cdots, [t_m]) \text{ právě když } P_{\mathcal{M}}(t_1, \cdots, t_m)$$

Korektnost této definice (tj. nezávislost na volbě reprezentantů) se dokáže pomocí R1–R3 podobným stylem jako výše. Snadno se ověří, že realizací uzavřeného termu t je ve struktuře $\mathcal{O}$ je $[s]$ právě když $S \vdash s{=}t$. To znamená, že predikátový symbol $=$ je v $\mathcal{O}$ realizován jako identita.

Zbývá ukázat, že $\mathcal{O}$ je modelem S. Podobně jako ve *větě 75* budeme chtít prokázat, že pro libovolnou formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka teorie S platí:

- Jestliže $t_1, \cdots, t_n$ jsou uzavřené termy jazyka teorie S, pak $T \vdash \varphi(x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n)$ právě když $\mathcal{O} \models \varphi(x_1/[t_1], \cdots, x_n/[t_n])$.

Jelikož S je henkinovská a úplná, platí podle *věty 75*

- $T \vdash \varphi(x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n)$ právě když $\mathcal{M} \models \varphi(x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n)$

Stačí tedy ukázat, že

- $\mathcal{M} \models \varphi(x_1/t_1, \cdots, x_n/t_n)$ právě když $\mathcal{O} \models \varphi(x_1/[t_1], \cdots, x_n/[t_n])$

To lze lehce provést indukcí ke struktuře φ. $\square$

Kurt Gödel (1906–1978)

Věta 76 (o úplnosti, Kurt Gödel). *Každá bezesporná teorie má model. Pro každou teorii* T *a každou formuli jejího jazyka tedy platí, že jestliže* $\mathsf{T} \models \varphi$, *pak* $\mathsf{T} \vdash \varphi$.

Důkaz. Jde o jednoduchý důsledek předchozích vět. $\square$

Věta 77. *Teorie T má model, právě když každá její podteorie s konečně mnoha axiómy (a s minimálním jazykem, v němž jsou tyto axiómy formulovatelné) má model.*

Důkaz. Směr „$\Rightarrow$“ je triviální. Pro opačnou implikaci stačí ukázat, že T je bezesporná (pak T má model podle věty o úplnosti). Kdyby T byla sporná, existoval by důkaz formule $\psi \wedge \neg\psi$ v T. Tento důkaz je konečný, využívá tedy jen konečně mnoho axiómů T, které tvoří spornou podteorii T, spor. $\square$

Poznámka 78. *Z důkazu věty 71 plyne, že každá bezesporná teorie s jazykem bez rovnosti má model kardinality* $\max\{|L|, \aleph_0\}$ *(při rozšíření teorie na henkinovskou bylo přidáno* $|L| \cdot \aleph_0$ *nových konstant). Toto pozorování neplatí pro teorie s jazykem s rovností (např. pro* $T = \{\forall x\, x{=}c\}$*. Nicméně lze dokázat následující:*

Věta 79. *Nechť* T *je teorie a nechť pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje model teorie* T *jehož nosič má mohutnost alespoň* n*. Pak* T *má nekonečný model.*

Důkaz. Je-li jazyk teorie T jazykem bez rovnosti, plyne tvrzení ihned z *poznámky 78*. Jinak pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme formuli $\varphi_n \equiv \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y\ x_1{\neq}y \wedge \cdots \wedge x_n{\neq}y$ a teorii $S_n = T \cup \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$. Podle předpokladu věty má každá S_n model. Podle věty o kompaktnosti má proto model i teorie $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n$. Tento model je nutně nekonečný a je i modelem teorie T. $\square$

Věta 80 (Löwenheimova-Skolemova)**.** *Nechť T je teorie s jazykem L, která má nekonečný model. Nechť κ je nekonečný kardinál takový, že $\kappa \geq |L|$. Pak T má model mohutnosti κ.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}$ je nekonečný model T. Jazyk L rozšíříme o systém $\{c_i \mid i < \kappa\}$ nových konstant a k T přidáme axiómy $\{c_i \neq c_j \mid i, j < \kappa\}$. Obdržíme tak teorii T'. Nechť K je konečná část T', a nechť $c_1, \cdots, c_n$ jsou všechny nově přidané konstanty, které se vyskytují ve formulích teorie K (takových konstant je jen konečně mnoho). Pokud tyto konstanty realizujeme navzájem různými prvky nosiče $\mathcal{M}$, obdržíme model teorie K. Každá konečná část T' je tedy splnitelná. Podle věty o kompaktnosti má tedy model i teorie T'. Nosič tohoto model ale nutně obsahuje alespoň κ navzájem různých individuí. $\square$

VĚTA O NEÚPLNOSTI. *Úvod.*

- *Jazyk aritmetiky* je jazyk s rovností obsahující konstantu 0, unární funkční symbol S a dva binární funkční symboly $*$ a $+$.
- Význačnou realizací jazyka aritmetiky je $(\mathbb{N}_0, *, +)$, kde univerzem je soubor všech nezáporných celých čísel, 0 je realizováno jako nula, S jako funkce následníka, $*$ jako násobení, $+$ jako sčítání. (Relační predikáty jako $<, \leq$ lze snadno definovat.)
- Jedním ze základních kroků *Hilbertova programu* formalizace matematiky mělo být vytvoření *rekurzivní a úplné* teorie T jazyka aritmetiky.
- Slovem „úplné“ se myslí, že $T \vdash \varphi$ právě když $\varphi \in \mathit{Th}(\mathbb{N}_0, *, +)$ (Tj. formule dokazatelné v T jsou právě formule pravdivé v $(\mathbb{N}_0, *, +)$).
- Slovo „rekurzívní“ intuitivně znamená, že musí být „mechanicky ověřitelné“, zda daná posloupnost symbolů je či není důkazem v T (možných formalizací tohoto pojmu je více).
- Z Gödelových výsledků plyne, že taková teorie neexistuje.

Alan Turing (1912–1954)

- Definoval pojem Turingova stroje a s jeho pomocí ukázal, že problém pravdivosti formulí prvního řádu je *nerozhodnutelný*.
- Považován za zakladatele informatiky (jako vědy).
- Turingův stroj je matematickým modelem „hloupého odvozovače“, který má k dispozici papír, tužku a gumu, a který si pamatuje konečně mnoho schémat axiómů.
- Význam Turingova stroje coby modelu reálných výpočetních zařízení se projevil až v druhé polovině 20. století.

Základní pojmy:

- Je-li Σ konečná *abeceda*, značí symbol Σ^* soubor všech konečných slov složených z prvků Σ (prázdné slovo značíme symbolem ε). Délku slova w značíme $len(w)$. Pro každé $1 \leq i \leq len(w)$ značí symbol $w(i)$ i-tý znak slova w (zleva). *Jazyk* nad abecedou Σ je podmnožina Σ^*.
- *Turingův stroj* je matematický model výpočetního zařízení, které je vybaveno konečně-stavovou *řídicí jednotkou* („hlava odvozovače“), jednosměrně nekonečnou *pracovní páskou* („papír“), a čtecí/zápisovou hlavou („tužka/guma“).
- Na začátku výpočtu je na pásce zapsáno konečné *vstupní slovo*, hlava je na nejlevější pozici, a stavová jednotka je v počátečním stavu.
- Stroj na základě svého momentálního kontrolního stavu a symbolu pod čtecí hlavou provede „výpočetní krok“, tj. změní svůj kontrolní stav, nahradí symbol pod čtecí hlavou jiným symbolem, a posune čtecí hlavu vlevo nebo vpravo.

- Výpočet se zastaví, pokud stroj dojde do konfigurace, jejíž kontrolní stav je *akceptující* nebo *zamítající*. Pro některá slova může stroj také *nezastavit* (cyklit).
- Vstupní slovo je *akceptované*, jestliže stroj po konečně mnoha krocích dojde do akceptující konfigurace. Soubor všech vstupních slov, která stroj akceptuje, tvoří *jazyk akceptovaný daným strojem*.

Definice 81. *Turingův stroj je devítice $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, \bullet, \delta, q_0, Acc, Rej)$, kde*

- Q *je konečný soubor kontrolních stavů;*
- Σ *je konečná vstupní abeceda;*
- Γ *je konečná pásková abeceda (kde $\Sigma \subseteq \Gamma$);*
- $B \in \Gamma$ *je prázdný znak;*
- $\bullet \in \Gamma$ *je znak konce pásky;*
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ *je přechodová funkce, kde pro každé $p \in Q$ platí $\delta(p, \bullet) = (q, \bullet, R)$ pro nějaké $q \in Q$;*
- $q_0 \in Q$ *je počáteční stav;*
- $Acc \subseteq Q$ *je množina akceptujících stavů;*
- $Rej \subseteq Q \setminus Acc$ *je množina zamítajících stavů.*

➠ Nechť $\circ, \# \notin Q \cup \Gamma$, a nechť $\mathcal{C}(M) = (\Gamma \cup \{\#\}) \times (Q \cup \{\circ\})$. Prvky $\mathcal{C}(M)$ zapisujeme ve tvaru $[X, q]$.

➠ *Konfigurace* stroje M je slovo $[X_1, p_1] \cdots [X_n, p_n]\, [\#, \circ] \in \mathcal{C}(M)^*$ takové, že $n \geq 1$, $X_1 = \bullet$, $X_i \neq \#$ pro každé $1 \leq i \leq n$, a existuje právě jedno $1 \leq j \leq n$, kde $p_j \in Q$. Slovo $X_1 \cdots X_n$ nazýváme *obsahem pásky* dané konfigurace, a stav p_j kontrolním stavem dané konfigurace.

➠ *Akceptující* resp. *zamítající* konfigurace je konfigurace, jejíž kontrolní stav je akceptující resp. zamítající. *Koncová* konfigurace je konfigurace, která je akceptující nebo zamítající. Soubor všech konfigurací stroje M značíme $\mathit{Conf}(M)$.

➠ *Krok výpočtu* je funkce $\mathit{step} : \mathit{Conf}(M) \to \mathit{Conf}(M)$, která je pro koncové konfigurace definována jako identita a pro nekoncové konfigurace takto:

→ $\mathit{step}(\gamma\, [X, q]\, [Y, \circ]\, \rho) = \gamma\, [Z, \circ]\, [Y, r]\, \rho$ jestliže $\delta(q, Y) = (r, Z, R)$

→ $\mathit{step}(\gamma\, [Y, \circ]\, [X, q]\, \rho) = \gamma [Z, \circ]\, [Y, r]\, \rho$ jestliže $\delta(q, Y) = (r, Z, L)$

→ $\mathit{step}(\gamma\, [X, q]\, [\#, \circ]) = \gamma [Z, \circ]\, [B, r]\, [\#, \circ]$ jestliže $\delta(q, Y) = (r, Z, R)$

- Nechť $w = a_1 \cdots a_n$ je slovo nad abecedou Σ (w může být i prázdné). *Iniciální konfigurace* pro w je konfigurace $\alpha(w) = [\bullet, q_0][a_1, \circ] \cdots [a_n, \circ]\,[\#, \circ]$. Slovo w je *akceptované* strojem M, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathit{step}^k(\alpha(w))$ je akceptující konfigurace. *Jazyk* akceptovaný strojem M, označovaný $L(M)$, je soubor všech $w \in \Sigma^*$, které jsou akceptované strojem M.
- Nechť $([X_1, p_1], [X_2, p_2], [Y_1, q_1], [Y_2, q_2])$ je čtveřice symbolů z $\mathcal{C}(M)$. Tato čtveřice je *kompatibilní*, jestliže existuje nekoncová konfigurace $\alpha \in \mathit{Conf}(M)$ a vhodné $1 \leq i < \mathit{len}(\alpha)$ takové, že $\alpha(i) = [X_1, p_1]$, $\alpha(i{+}1) = [X_2, p_2]$ a dále $\beta(i) = [Y_1, q_1]$, $\beta(i{+}1) = [Y_2, q_2]$ kde $\beta = \mathit{step}(\alpha)$. Soubor všech kompatibilních čtveřic stroje M označme $\mathit{Comp}(M)$. Soubor $\mathit{Comp}(M)$ lze snadno „vypočítat“ na základě toho, jak vypadá přechodová funkce δ.
- Nechť $\alpha \in \mathit{Conf}(M)$ je konfigurace a nechť $\beta \in \mathcal{C}(M)^*$ je slovo stejné délky, jako má α. Pak $\beta = \mathit{step}(\alpha)$ právě když pro každé $1 \leq i < \mathit{len}(\alpha)$ platí, že $(\alpha(i), \alpha(i{+}1), \beta(i), \beta(i{+}1)) \in \mathit{Comp}(M)$.

Nyní zavedeme několik pojmů, které se týkají jazyků.

- Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je *rekurzivně vyčíslitelný*, jestliže $L = L(M)$ pro nějaký Turingův stroj M. Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je *rekurzivní*, jestliže $L = L(M)$ pro nějaký Turingův stroj M, který zastaví pro *každé* vstupní slovo. Jednoduché pozorování je, že jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je rekurzivní právě když L i $\overline{L}$ jsou rekurzivně vyčíslitelné (kde $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$).
- Předpokládejme, že kontrolní stavy a symboly páskové abecedy *každého* Turingova stroje jsou prvky nějaké fixní spočetné množiny (to lze bez újmy na obecnosti). Pak *každý* Turingův stroj M lze jednoznačně zapsat jako slovo $\mathit{code}(M) \in \{0,1\}^*$. Podobně každé vstupní slovo w stroje M lze jednoznačně zapsat jako slovo $\mathit{code}(w) \in \{0,1\}^*$. Navíc lze předpokládat, že *každé* $v \in \{0,1\}^*$ je kódem nějakého stroje M_v a nějakého vstupního slova w_v stroje M_v.
- Uvedené kódování umožňuje zkonstruovat *univerzální* Turingův stroj U se vstupní abecedou $\{0,1,\#\}$ takový, že pro každé slovo tvaru $u\#v$, kde $u, v \in \{0,1\}^*$, platí, že U akceptuje $u\#v$ právě když stroj M_u akceptuje slovo w_v.
- Uvažme jazyk $\mathit{Accept} = \{u\#v \mid M_u \text{ akceptuje } w_v\}$. Podle předchozího bodu je Accept rekurzívně vyčíslitelný. Ukážeme, že Accept *není rekurzívní*. Podle jednoho z předchozích bodů pak jazyk $\overline{\mathit{Accept}}$ *není rekurzivně vyčíslitelný*.

Věta 82. *Jazyk $Accept$ není rekuzivní.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje Turingův stroj M, který zastaví pro každé vstupní slovo a $L(M) = Accept$. Buď M' stroj se vstupní abecedou $\{0, 1\}$, který funguje následovně:

- M' pro dané vstupní slovo u nejprve „vyrobí" na pásce slovo $u\#u$.
- Pak M' přesune čtecí hlavu úplně vlevo a dále se začne chovat jako stroj M s tím rozdílem, že se zamění akceptující a zamítající stavy.
- Výsledkem je, že $u \in L(M')$ právě když $u\#u \notin L(M)$

Nechť $v = code(M')$. Platí $w_v \in L(M')$?

- Ano. Pak $v\#v \notin L(M)$, tj. $M_v = M'$ neakceptuje w_v, spor.
- Ne. Pak $v\#v \in L(M)$, tj. $M_v = M'$ akceptuje w_v, spor.

Z předpokladu existence stroje M se nám podařilo odvodit spor. Stroj M tedy *neexistuje*. □

Jedním z pokusů o vytvoření rekurzivní a úplné teorie aritmetiky byl následující systém nazývaný *Peanova aritmetika* (seznam Peanových axiómů bývá v literatuře uváděn v různých podobách):

- $\forall x\ S(x) \neq 0$
- $\forall x \forall y\ S(x){=}S(y) \rightarrow x{=}y$
- $\forall x\ x{+}0 = x$
- $\forall x \forall y\ x{+}S(y) = S(x{+}y)$
- $\forall x\ x{*}0 = 0$
- $\forall x \forall y\ x{*}S(y) = (x{*}y) + x$
- $(\varphi(0) \wedge \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$, kde φ je formule s jednou volnou proměnnou x.

Každou formuli jazyka aritmetiky je možné zapsat jako slovo nad abecedou $\{v, +, *, 0, S, (,), \forall, \rightarrow, \neg, =, \#\}$. Různé proměnné zapisujeme jako řetězce složené z v různé délky (např. místo x, y, z můžeme psát v, vv, vvv apod.). Podobně můžeme i každou *konečnou* posloupnost formulí zapsat jako slovo nad uvedenou abecedou, kde symbol $\#$ použijeme pro oddělení jednotlivých formulí.

Definice 83. *Teorie T jazyka aritmetiky je rekurzivní, jestliže jazyk tvořený zápisy všech důkazů v T je rekurzivní.*

Lze snadno (i když technicky) dokázat, že např. Peanovy axiómy tvoří rekurzivní teorii. Definici rekurzivity teorie lze samozřejmě rozšířit i na teorie nad jinými jazyky. Rekurzivní teorie odpovídají (na intuitivní úrovni) právě teoriím, které umožňují „mechanické odvozování". Triviální pozorování o rekurzivních teoriích podává následující věta.

Věta 84. *Nechť T je rekurzivní teorie jazyka aritmetiky. Pak jazyk tvořený všemi formulemi dokazatelnými v T je rekurzivně vyčíslitelný.*

Nechť *Valid* je jazyk nad abecedou $\{v, +, *, 0, S, (,), \forall, \rightarrow, \neg, =\}$ obsahující zápisy všech formulí teorie $Th(\mathbb{N}_0, *, +)$. Naším cílem je dokázat, že *Valid* *není* rekurzivně vyčíslitelný jazyk.

Věta 85. *Jazyk Valid není rekurzivně vyčíslitelný.*

Důkaz. Ukážeme, že existuje Turingův stroj M, který pro každé vstupní slovo v nad abecedou $\{0, 1, \#\}$ zastaví v konfiguraci, kdy je na pásce zápsáno slovo w nad abecedou $\{v, +, *, 0, S, (,), \forall, \rightarrow, \neg, =\}$ takové, že $v \in \overline{Accept}$ právě když $w \in Valid$. Pokud by tedy jazyk *Valid* byl akceptovaný nějakým strojem M', stačilo by „napojit stroje M a M' za sebe" a dostali bychom stroj akceptující jazyk $\overline{Accept}$, což je spor.

Stroj M nejprve „prověří“ vstupní slovo: pokud není tvaru $u\#v$, M smaže vstupní pásku a zapíše na ní (nějakou) pravdivou formuli. Jinak M „nalezne“ prvočíslo p, takové, že $p > |C(M_u)|$. Pozorování:

- Jestliže zapisujeme čísla v soustavě o základu p, potřebujeme p „číslic“ $[0], \cdots, [p-1]$. Každému symbolu z $C(M_u)$ lze tedy přiřadit jedinečnou „číslici“. Dále nebudeme rozlišovat mezi symboly souboru $C(M_u)$ a jim přiřazenými číslicemi.
- Každé konfiguraci stroje M_u pak odpovídá číslo v soustavě o základu p. Zápis tohoto čísla získáme tak, že symboly konfigurace zapíšeme v opačném pořadí. Např. konfiguraci $[\bullet, \circ]\,[X, \circ]\,[Y, q]\,[Z, \circ]\,[B, \circ]\,[C, \circ]\,[C, \circ]\,[\#, \circ]$ zapíšeme jako číslo

$$[\#, \circ]\,[C, \circ]\,[C, \circ]\,[B, \circ]\,[Z, \circ]\,[Y, q]\,[X, \circ]\,[\bullet, \circ]$$

- M_u akceptuje slovo w_v právě když existuje *konečná* posloupnost konfigurací $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ s následujícími vlastnostmi:
  - → α_0 je počáteční konfigurace pro slovo w_v.
  - → $\alpha_{i+1} = \mathit{step}(\alpha_i)$ pro každé $0 \leq i < n$
  - → α_n je akceptující.

- Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zápisy konfigurací $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ mají *stejnou délku*. (Zápisy „krátkých“ konfigurací lze „doplnit“ zprava symboly $[B, \circ]$, zapsanými těsně před symbol $[\#, \circ]$.)
- Posloupnost konfigurací $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ lze tedy opět zapsat jako číslo v soustavě o základu p. Zápis tohoto čísla vypadá takto: $[\alpha_n]\,[\alpha_{n-1}]\cdots[\alpha_0]$, kde $[\alpha_i]$ je zápis konfigurace α_i tak, jak bylo popsáno výše.
- Sestrojíme formuli $\mathit{ACOMP}(y)$, která říká, že y reprezentuje akceptující výpočet stroje M_u na slově w_v. Tj. $\mathit{ACOMP}(y/k)$ platí právě když zápis čísla k v p-ární soustavě je zápisem akceptující výpočetní posloupnosti stroje M_u na slově w_v.
- Konstrukce $\mathit{ACOMP}(y)$ je „algoritmická“, tj. realizovatelná strojem M. Ten tuto formuli „vypočte“, na pásku zapíše formuli $\neg\exists y\, \mathit{ACOMP}(y)$ a přejde do akceptujícího stavu.

- Formuli $ACOMP(y)$ setrojíme postupně takto:
  - → „Číslo y je mocninou p.“ (Zde p je prvočíslo vypočtené výše.)

    $$POWER_p(y) \equiv \forall z((DIV(z,y) \wedge PRIME(z)) \rightarrow z{=}p)$$

  - → „V p-árním zápisu v se na $\log_p(y)$-tém místě zprava vyskytuje symbol $[b]$“. (Předpokládáme, že y je mocnina p)

    $$DIGIT(v,y,b) \equiv \exists u\, \exists a\, (v{=}a{+}by{+}upy \ \wedge \ a{<}y \ \wedge \ b{<}p)$$

  - → „V p-árním zápisu v tvoří dvojice po sobě jdoucích symbolů od pozice $\log_p(y)$ zprava následovaná dvojicí po sobě jdoucích symbolů od pozice $\log_p(z)$ zprava kompatibilní čtveřici.“ (Předpokládáme, že y i z jsou mocniny p.)

    $$MATCH(v,y,z) \equiv \bigvee_{([a],[b],[c],[d])\in Comp(M_u)} DIGIT(v,y,a) \wedge DIGIT(v,yp,b) \wedge DIGIT(v,z,c) \wedge DIGIT(v,zp,d)$$

  - → „V p-árním zápisu v se prvních $\log_p(d)$ znaků shoduje se zápisem výpočtu stroje M_u na slově w_v, kde délka zápisu konfigurací je $\log_p(c)$. (Předpokládáme, že d i c jsou mocniny p.)“

    $$MOVE(v,c,d) \equiv \forall y\, ((POWER_p(y) \ \wedge \ ypc{<}d) \rightarrow MATCH(v,y,yc))$$

→ „V p-árním zápisu v je jako první (zprava) zapsána konfigurace

$$[\bullet, q_0]\,[a_1, \circ] \cdots [a_n, \circ]\,[B, \circ] \cdots [B, \circ]\,[\#, \circ]$$

kde $w_v = a_1 \cdots a_n$ a délka této kofigurace je $\log_p(c) - 1$." (Předpokládáme, že c je mocnina p.)

$$\begin{aligned} \mathit{START}(v, c) \quad \equiv \quad & p^{n+1} < c \;\wedge\; \mathit{DIGIT}(v, 1, [\bullet, q_0]) \;\wedge \\ & \bigwedge_{i=1}^{n} \mathit{DIGIT}(v, p^i, [a_i, \circ]) \;\wedge \\ & \exists k\, (c = pk \;\wedge\; \mathit{DIGIT}(v, k, [\#, \circ]) \;\wedge \\ & \quad \forall y\, ((\mathit{POWER}_p(y) \;\wedge\; p^{n+1} < y < c) \rightarrow \mathit{DIGIT}(v, y, [B, \circ])) \end{aligned}$$

→ „V p-árním zápisu v se vyskytuje symbol s akceptujícím kontrolním stavem." (Předpokládáme, že d je mocnina p.) Nechť H je soubor všech p-árních číslic tvaru $[X, q]$, kde $X \in \Gamma$ a q je akceptující kontrolní stav stroje M_u.

$$\mathit{ACC}(v, d) \equiv \exists y\, (\mathit{POWER}_p(y) \;\wedge\; y < d \;\wedge\; \bigvee_{[a] \in H} \mathit{DIGIT}(v, y, a))$$

→ „p-ární zápis v je zápisem akceptujícího výpočtu stroje M_u na slově w_v."

$$\begin{aligned} ACOMP(v) \quad \equiv \quad & \exists c\, \exists d\, (POWER_p(c) \ \wedge\ POWER_p(c) \ \wedge\ c<d \ \wedge\ v<d \\ & \wedge\ START(v,c) \ \wedge\ MOVE(v,c,d) \ \wedge\ ACC(v,d)) \end{aligned}$$

➠ Výše uvedená konstrukce závisí jen na „jednoduchých" parametrech stroje M_u (prvočíslo p, soubor $Comp(M_u)$, apod.) a stroj M je dokáže snadno „zjistit" z kódu stroje M_u.

□

Triviálním důsledkem *věty 84* a *věty 85* je následující:

Věta 86 (o neúplnosti). *Neexistuje žádná rekurzivní teorie jazyka aritmetiky, ve které jsou dokazatelné právě všechny formule pravdivé v realizaci $(\mathbb{N}_0, +, *)$. Specielně pro každou korektní teorii T (tj. takovou teorii, která umožnuje dokázat pouze formule pravdivé v $(\mathbb{N}_0, +, *)$, nutně existuje formule platná v $(\mathbb{N}_0, +, *)$), která není v T dokazatelná.*

Věta 86 bývá v literatuře také označována jako *první věta o neúplnosti*. Původní Gödelova formulace této věty (a zejména její důkaz) vypadá odlišně. Klíčové obraty v Gödelově konstrukci si nyní naznačíme. V této části se slovem „formule“ myslí *formule jazyka aritmetiky*.

Nechť *PA* značí teorii Peanovy aritmetiky, a nechť $\mathcal{N}$ značí realizaci $(\mathbb{N}_0, +, *)$ jazyka aritmetiky. Formule jsou konečná slova nad abecedou $\{v, +, *, 0, S, (,), \forall, \rightarrow, \neg, =\}$ a lze je tedy kódovat *čísly* stejným způsobem jako konfigurace Turingových strojů. Pro každou formuli φ označíme symbolem $\lceil \varphi \rceil$ číslo, které je jejím kódem.

Lema 87 (Gödelovo lema o pevném bodě). *Pro každou formuli $\psi(x)$ existuje uzavřená formule τ taková, že $PA \vdash \tau \leftrightarrow \psi(\lceil \tau \rceil)$. (Formule τ říká „ψ platí pro můj kód“.)*

Důkaz. (osnova) Pro libovolnou fixní proměnnou x_0 lze sestrojit formuli $SUBST(x, y, z)$, která říká následující:

- „Číslo z je kódem formule, kterou získáme substitucí proměnné x_0 za konstantu s hodnotou x ve formuli s kódem y.“

Např. $SUBST(5, \lceil \varphi(x_0) \rceil, 413)$ je pravdivá právě když $\lceil \varphi(5) \rceil = 413$. Konstrukce formule $SUBST(x, y, z)$ je technická; lze použít podobný přístup jako při konstrukci formule *ACOMP* v důkazu *věty 85*.

Nyní definujeme

- $\sigma(x) \;\equiv\; \forall y\,(\mathit{SUBST}(x,x,y) \to \psi(y))$
- $\tau \;\equiv\; \sigma(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner)$

Ověřme, že τ má požadovanou vlastnost:

- $\tau \;\equiv\; \sigma(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner) \;\equiv\; \forall y\,(\mathit{SUBST}(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner,\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner,y) \to \psi(y))$
- $\mathcal{N} \models \forall y\,(\mathit{SUBST}(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner,\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner,y) \to \psi(y))$ právě když $\mathcal{N} \models \forall y\,(y = \ulcorner\sigma(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner)\urcorner \to \psi(y))$
- $\forall y\,(y = \ulcorner\sigma(\ulcorner\sigma(x_0)\urcorner)\urcorner \to \psi(y)) \;\equiv\; \forall y\,(y = \ulcorner\tau\urcorner \to \psi(y))$
- $\mathcal{N} \models \forall y\,(y = \ulcorner\tau\urcorner \to \psi(y))$ právě když $\mathcal{N} \models \psi(\ulcorner\tau\urcorner)$

Předchozí argument se opírá o *sémantickou* ekvivalenci jistých formulí; ekvivalence těchto formulí je ale ve skutečnosti *dokazatelná v PA*. Např.

$$\mathit{PA} \vdash (\forall y\,(y = \ulcorner\tau\urcorner \to \psi(y))) \leftrightarrow \psi(\ulcorner\tau\urcorner)$$

což je třeba v posledním bodu. Proto $\mathit{PA} \vdash \tau \leftrightarrow \psi(\ulcorner\tau\urcorner)$. □

VĚTA O NEÚPLNOSTI. ***Gödelův důkaz.***

Věta 88 (1. věta o neúplnosti, Gödelova). *Lze sestrojit uzavřenou formuli ρ, která je pravdivá v $\mathcal{N}$, ale není dokazatelná v PA.*

Důkaz. (osnova) Ukáže se, že i důkazy (tj. konečné posloupnosti formulí) je možné kódovat čísly, a že existuje formule $PROOF(x, y)$, která říká, že x je kódem důkazu (v PA) pro formuli s kódem y. Dokazatelnost v PA lze pak zapsat formulí

- $PROVABLE(y) \;\equiv\; \exists x\, PROOF(x, y)$

Pak pro každou uzavřenou formuli φ platí

- $PA \vdash \varphi$ právě když $\mathcal{N} \models PROVABLE(\lceil\varphi\rceil)$

Dále lze ukázat

- $PA \vdash \varphi$ právě když $PA \vdash PROVABLE(\lceil\varphi\rceil)$

Směr „$\Leftarrow$" plyne ihned z korektnosti PA (indukcí se snadno ukáže, že jestliže $PA \vdash \varphi$, pak $\mathcal{N} \models \varphi$). Opačný směr je výrazně pracnější.

Nyní stačí aplikovat lema 87 na formuli $\neg PROVABLE(x)$. Dostaneme tak sentenci ρ takovou, že platí

- $PA \vdash \rho \leftrightarrow \neg PROVABLE(\lceil\rho\rceil)$

Formule ρ tedy říká *„já nejsem dokazatelná“*, přičemž toto tvrzení je v PA dokazatelné. Z korektnosti PA dostáváme, že

- $\mathcal{N} \models \rho \leftrightarrow \neg PROVABLE(\lceil \rho \rceil)$

Pak ale musí platit $\mathcal{N} \models \rho$; kdyby totiž $\mathcal{N} \models \neg\rho$, dostaneme $\mathcal{N} \models PROVABLE(\lceil \rho \rceil)$, proto $PA \vdash \rho$ a tedy $\mathcal{N} \models \rho$, spor.

Jelikož $\mathcal{N} \models \rho$, platí $\mathcal{N} \models \neg PROVABLE(\lceil \rho \rceil)$, tedy $\mathcal{N} \not\models PROVABLE(\lceil \rho \rceil)$, proto $PA \nvdash \rho$.

Formule ρ je tedy pravdivá v $\mathcal{N}$, ale není dokazatelná v PA. $\square$

Pozorování:

- Důkaz *věty 88* se opírá o možnost vyjádřit jistá *matatvrzení* o formulích aritmetiky a teorii *PA* jako formule aritmetiky. Typicky lze takto vyjádřit tvrzení, která se týkají *dokazatelnosti*.
  - → Metatvrzení „$PA \vdash \varphi$“ lze vyjádřit formulí $PROVABLE(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Dokonce platí $PA \vdash \varphi$ právě když $PA \vdash PROVABLE(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
  - → I metatvrzení „$PA \vdash \varphi$ právě když $PA \vdash PROVABLE(\ulcorner\varphi\urcorner)$“ lze vyjádřit v *PA* pomocí formule

    $$PROVABLE(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow PROVABLE(\ulcorner PROVABLE(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$$

    I tato formule je v *PA* dokazatelná.
  - → *Bezespornost* teorie *PA* lze vyjádřit formulí $CONSIS \equiv \neg PROVABLE(\ulcorner\xi \wedge \neg\xi\urcorner)$, kde ξ je (nějaká) formule.

- Jsou ale i metatvrzení o formulích aritmetiky, která jako formule aritmetiky výjádřit *nelze*. Typicky se jedná o tvrzení týkající se *pravdivosti*.
  - → Tvrzení „$\mathcal{N} \models \varphi$“ jako formuli aritmetiky vyjádřit nelze: Předpokládejme naopak, že existuje formule $TRUE(x)$ taková, že $\mathcal{N} \models \varphi$ právě když $\mathcal{N} \models TRUE(\lceil\varphi\rceil)$. Pak podle *lematu 87* existuje sentence τ taková, že $\mathcal{N} \models \tau$ právě když $\mathcal{N} \models \neg TRUE(\lceil\tau\rceil)$. Ovšem podle výše uvedeného platí $\mathcal{N} \models \tau$ právě když $\mathcal{N} \models TRUE(\lceil\tau\rceil)$, což je spor.

Úvahy o vyjádřitelnosti některých vlastností teorie *PA* formulemi aritmetiky hrají klíčovou roli v důkazu následujícího tvrzení:

Věta 89 (2. věta o neúplnosti, Gödelova)**.** *Je-li PA bezesporná, pak CONSIS není v PA dokazatelná. (Jinými slovy: v „dostatečně silné“ teorii lze dokázat její vlastní bezespornost jen v případě, že je tato teorie sporná.)*

Důkaz. (osnova) Nechť ρ je formule zkonstruovaná v důkazu *věty 88* (která o sobě říká, že je nedokazatelná). Uvažme následující metatvrzení:

→ „Jestliže $PA \vdash \rho$, pak platí $PA \vdash PROVABLE(\lceil\rho\rceil)$ a současně $PA \vdash \neg PROVABLE(\lceil\rho\rceil)$“

Toto tvrzení je nejen pravdivé, ale lze ho vyjádřit formulí aritmetiky, která je navíc *dokazatelná* v *PA*:

→ $PA \vdash PROVABLE(\lceil\rho\rceil) \rightarrow$
$(PROVABLE(\lceil PROVABLE(\lceil\rho\rceil)\rceil) \wedge PROVABLE(\lceil\neg PROVABLE(\lceil\rho\rceil)\rceil))$

Proto platí také $PA \vdash PROVABLE(\lceil\rho\rceil) \rightarrow \neg CONSIS$.

Obměnou uvedeného tvrzení dostáváme

→ $PA \vdash CONSIS \rightarrow \neg PROVABLE(\ulcorner\rho\urcorner)$

Kdyby $PA \vdash CONSIS$, platilo by také $PA \vdash \neg PROVABLE(\ulcorner\rho\urcorner)$ (aplikací MP). Už dříve jsme ale ukázali (viz důkaz *věty 88*), že

→ $PA \vdash \rho \leftrightarrow \neg PROVABLE(\ulcorner\rho\urcorner)$

Další aplikací MP tedy dostáváme $PA \vdash \rho$. Výše jsme ale ukázali, že předpoklad $PA \vdash \rho$ implikuje, že PA je sporná. Celkem tedy dostáváme, že předpoklad $PA \vdash CONSIS$ implikuje, že PA je sporná. □

Na intuitivní úrovni: druhá věta o neúplnosti říká, že bezespornost „dostatečně silné“ teorie (např. teorie množin) *nelze v této teorii dokázat*. Jediná možnost je použít *metaargumenty*, tj. zdůvodnit bezespornost dané teorie pomocí teorie „vyšší“. Ani bezespornost této vyšší teorie není ovšem možno prokázat v ní samé. Na nějaké úrovni nám prostě nezbývá, než v bezespornost *uvěřit*, resp. ji *předpokládat*. Gödelovy výsledky o neúplnosti mají tedy i svůj *epistemologický* význam.