Základy matematiky — podzim 2006 — 1. opravný termín — 19.1.2007

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Existuje množina A taková, že existuje bijekce z množiny A do množiny $\mathcal{P}(A)$.

(b) **ano — ne** Pro libovolnou bijekci $f : A \to B$ existuje zobrazení $g : B \to A$ takové, že $g \circ f = id_A$.

(c) **ano — ne** Každá uspořádaná množina obsahuje pouze konečně mnoho maximálních prvků.

(d) **ano — ne** Je-li $f : A \to B$ izomorfismus uspořádaných množin $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$, pak platí: pokud $(A, \leq)$ je úplný svaz, pak $(B, \leq)$ je úplný svaz.

(e) **ano — ne** Množina $\mathbb{R}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{C}, +)$.

(f) **ano — ne** Prázdná relace, tj. $\emptyset$, je symetrická relace na libovolné množině.

(g) **ano — ne** Množina všech relací na množině $\mathbb{N}$, která jsou zobrazení, uspořádaná inkluzí tvoří úplný svaz.

2. (7 bodů) Definujte pojmy grupa, komutativní grupa a izomorfismus grup. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Ve skladě je 20 výrobků, z toho je 5 zmetků. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat 7 předmětů tak, aby

(a) byly všechny dobré;

(b) byl mezi nimi nejvýše jeden zmetek;

(c) mezi nimi bylo všech 5 zmetků.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) svazu, který nemá nejmenší prvek;

(b) nekonečného, nespočetného úplného svazu;

(c) 4-prvkové grupy;

(d) relace na množině $\mathbb{N}$, která je relace ekvivalence a přitom není relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z}$;

(e) uspořádání na množině $\mathbb{Z}$, kde je nekonečně mnoho maximálních prvků a nekonečně mnoho minimálních prvků a kde každý maximální prvek je větší než libovolný minimální.

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, [b]_2) \circ (c, [d]_2) = (a + (-1)^b c, [b + d]_2), \text{ pro } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že předpis korektně definuje operaci.

Rozhodněte, zda je operace $\circ$ asociativní.

Rozhodněte, zda v $(M, \circ)$ existuje neutrální prvek.

Je $(M, \circ)$ grupa?

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$ a $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti. Určete počet všech izotonních zobrazení z $(A, \leq)$ do $(B, \leq)$.

Určete počet všech izotonních zobrazení z $(B, \leq)$ do $(A, \leq)$.

Výpočty komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{N}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x \rho y \iff (\exists m, n \in \mathbb{N})(x \mid y^m \wedge y \mid x^n).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{N}$.

Popište rozklad $\mathbb{N} \backslash \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $\mathbb{N}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$k \preceq m \iff (k \mid m \ \wedge \ k+1 \mid m+1), \quad \text{pro } k, m \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání.

Je 7 minimální prvek? Existuje nějaký minimální prvek?

Je 7 maximální prvek? Existuje nějaký maximální prvek?

Je $(\mathbb{N}, \preceq)$ svaz?

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Na množině $M = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \cap Y \neq \emptyset\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$(X, Y) \preceq (X', Y') \iff (X \subseteq X' \ \wedge \ Y \subseteq Y').$$

Je $(M, \preceq)$ úplný svaz?

Dejte příklad injektivního zobrazení $\varphi : (M, \preceq) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$, které je izotonní.

Dejte příklad injektivního zobrazení $\varphi : (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq) \to (M, \preceq)$, které je izotonní.

Odpovědi zdůvodněte.