Základy matematiky podzim 2006 2. opravný termín 26.1.2007

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Existuje bijekce z množiny $\mathbb{Q}$ do množiny $\mathbb{N}$.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: pokud $g \circ f$ je surjektivní, pak f nebo g je surjektivní.

(c) **ano** — **ne** Uspořádané množiny $(\mathbb{Q}, \leq)$ a $(\mathbb{R}, \leq)$ jsou izomorfní.

(d) **ano** — **ne** Každý svaz má nejmenší prvek.

(e) **ano** — **ne** Číslo 0 je neutrální prvek v grupoidu $(\mathbb{Z}, -)$.

(f) **ano** — **ne** Pokud je binární relace R na množině A tranzitivní, pak R^{-1} je také tranzitivní.

(g) **ano** — **ne** Existuje jediný izomorfismus uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ do sebe.

2. (7 bodů) Definujte pojem rozkladu množiny A. Definujte pojmy relace ekvivalence na množině A a rozkladu příslušného této relaci (tzv. faktorová množina). Definujte pojem projekce na faktorovou množinu příslušnou dané relaci ekvivalence.

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den (6 různých vyučovacích hodin),

(a) má-li být tělesná výchova až poslední;

(b) má-li být tělesná výchova po matematice;

(c) má-li být tělesná výchova bezprostředně po matematice.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) izotonního zobrazení z $(\mathbb{R}, \leq)$ do $(\mathbb{Q}, \leq)$;

(b) nespočetné množiny a její spočetné podmnožiny;

(c) nekonečného tělesa;

(d) relací ρ a σ na množině $\mathbb{N}$ takových, že $\rho \circ \sigma = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \neq \sigma \circ \rho$;

(e) uspořádání pětiprvkové množiny, kde 2 prvky jsou maximální, 2 prvky jsou minimální a existuje prvek srovnatelný se všemi ostatními.

5. (10 bodů) Označme $M_1 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $M_2 = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$, $M_3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ a $M_4 = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$. Uvažme předpis $(a, b) \circ (c, d) = (a + bc, bd)$.
Pro které z množin M_1, M_2, M_3, M_4 daný předpis korektně definuje operaci na dané množině?

Pro které z nich je tato operace asociativní?

Pro které z nich existuje neutrální prvek?

Pro které se jedná o grupu?

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $B = \{1, 2, \ldots, n+k\}$. Určete počet všech injektivních zobrazení z množiny A do množiny B.

Kolik z nich je navíc izotonními zobrazeními z $(A, \leq)$ do $(B, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádání přirozených čísel podle velikosti.

Určete počet všech izotonních zobrazení z $(A, \leq)$ do $(B, \leq)$.

Výpočty komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x\rho y \iff (\exists k \in \mathbb{N})(x^k = y^k).$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R}$.

Popište rozklad $\mathbb{R}\backslash\rho$.

Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$p \preceq q \iff (p \leq q \wedge \lfloor p^3 \rfloor = \lfloor q^3 \rfloor) \quad \text{pro } p, q \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathbb{R}, \preceq)$.

Je $(\mathbb{R}, \preceq)$ svaz?

Rozhodněte, zda $id_{\mathbb{R}}$ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(\mathbb{R}, \preceq)$ do uspořádané množiny $(\mathbb{R}, \leq)$.

Rozhodněte, zda $id_{\mathbb{R}}$ je izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(\mathbb{R}, \leq)$ do uspořádané množiny $(\mathbb{R}, \preceq)$.

Odpovědi zdůvodněte. (Pozn: $\leq$ je uspořádání reálných čísel podle velikosti, $\lfloor p \rfloor$ značí celou část čísla p.)

9. (10 bodů) Buď A libovolná neprázdná množina. Na množině $M = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$(X,Y) \preceq (X',Y') \iff (\ X \subseteq X' \ \wedge \ Y \subseteq Y'\ ).$$

Dále je dáno zobrazení $\varphi : M \to M$ předpisem $\varphi((X,Y)) = (Y - X, Y)$.
Je zobrazení $\varphi : (M, \preceq) \to (M, \preceq)$ izotonní?

Je zobrazení $\varphi : M \to M$ injektivní?

Je zobrazení $\varphi : M \to M$ surjektivní?

Odpovědi zdůvodněte.