Demonstrované cvičení k přednášce Matematika III

26.9.2006

Příklad 1. *Určete parametrické i obecné rovnice tečny ke křivce* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)) = (t, t^2, t^3)$ *v bodě odpovídajícím hodnotě parametru* $t = 1$.

Řešení. Parametru $t = 1$ odpovídá bod $c(1) = [1, 1, 1]$. Derivace jednotlivých složek jsou $c_1'(t) = 1$, $c_2'(t) = 2t$, $c_3(t) = 3t^2$. Hodnoty derivací v bodě $t = 1$ jsou 1, 2, 3. Parametrické vyjádření tečny tedy zní:

$$\begin{aligned} x &= c_1'(1)s + c_1(1) = t + 1 \\ y &= c_2'(1)s + c_2(1) = 2t + 1 \\ z &= c_3'(1)s + c_3(1) = 3t + 1. \end{aligned}$$

Vyloučením parametru t dostáváme obecné rovnice tečny (nejsou dány kanonicky):

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 3x - z &= 2. \end{aligned}$$

$\square$

Příklad 2. *Určete, zda tečná rovina ke grafu funkce* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot \ln(y)$ *v bodě* $[1, \frac{1}{e}]$ *prochází bodem* $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

Řešení. Určíme nejdříve parciální derivace: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln(y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{y}$, jejich hodnoty v bodě $(1, \frac{1}{e})$ jsou -1, e, dále $f(1, \frac{1}{e}) = -1$. Rovnice tečné roviny je tedy

$$\begin{aligned} z &= f\left(1, \frac{1}{e}\right) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\left(1, \frac{1}{e}\right)(x+1) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\left(1, \frac{1}{e}\right)\left(y - \frac{1}{e}\right) \\ &= -1 - x + ey. \end{aligned}$$

Této rovnici daný bod nevyhovuje, v tečné rovnině tedy neleží. □

Příklad 3.* *Určete parametrické vyjádření tečny k průsečnici grafů funkcí* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + xy - 6,\ g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ g(x,y) = x \cdot \ln(y)$ v *bodě* $[2,1]$.

Řešení. Tečna k průsečnici je průsečnicí tečných rovin v daném bodě. Tečná rovina ke grafu funkce f procházející bodem $[2,1]$ je

$$\begin{aligned} z &= f(2,1) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(2,1)(x-x_0) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(2,1)(y-y_0) \\ &= 5x + 2y - 12. \end{aligned}$$

Tečná rovina k grafu g je pak

$$\begin{aligned} z &= f(2,1) + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(2,1)(x-x_0) + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(2,1)(y-y_0) \\ &= 2y - 2. \end{aligned}$$

Průsečnicí těchto dvou rovin je přímka daná parametricky jako $[2, t, 2t-2]$, $t \in \mathbb{R}$

Alternativně: normála k ploše určené rovnicí $f(x,y,z) = 0$ v bodě $b = [2,1,0]$ je $(f_x(b), f_y(b), f_z(b)) = (5,2,-1)$, normála k ploše určené jako $g(x,y,z) = 0$ v tomtéž bodě je $(0,2,-1)$. Tečna je kolmá na obě normály, její směrový vektor získáme tedy např. vektorovým součinem normál, což je $(0,5,10)$. Protože tečna prochází bodem $[2,1,0]$ je její parametrické vyjádření $[2, 1+t, 2t]$, $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

Příklad 4. *Určete Taylorův polynom druhého řádu funkce* $\ln(x^2y)$ *v bodě* $[1,1]$.

Řešení.

$$T^2_{\ln(xy+1)}(1,1) = \ln(2) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + xy - x - y - 1).$$

$\square$

Příklad 5. *Určete extrémy funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x^2y - xy - x$

Řešení. $f_x = 2xy - y - 1$, $f_y = x^2 - x$, $Hf = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Stacionární body $(0,-1)$, $(1,1)$, v obou je Hessián indefinitní, tedy funkce extrémy nemá. $\square$

Sylvestrovo kriterium positivní definitnosti. Symetrická čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ je positivně (semi)definitní, jestliže jsou všechny její vedoucí hlavní minory kladné (nezáporné).

Důsledek. Symetrická čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ je negativně (semi)definitní, jestliže její vedoucí hlavní minory střídají znaménka (případně jsou nulové), počínaje znaménkem mínus.

Příklad 6. *V rovině* $x + 2y + z = 1$ *v* $\mathbb{R}^3$ *určete bod, který má nejmenší vzdálenost od bodu* $(1, 1, 1)$.

Zkoumejte záměnnost parciálních derivací funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{pro} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$