Drsná matematika III — 13. přednáška
Vytvořující funkce

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18. 12. 2006

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.

Plán přednášky

Heslo dne: – „spojité a diskrétní metody se vzájemně potřebují“

Heslo dne: – „spojité a diskrétní metody se vzájemně potřebují“

Example

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme Colu za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Heslo dne: – „spojité a diskrétní metody se vzájemně potřebují“

Example

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme Colu za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla i, j a k taková, že $i + j + k = 22$ a zároveň

$$i \in \{0,1,2,3,4\}, \ j \in \{0,1,2,3,4,5\}, \ k \in 0,1,2,3.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(x^5 + x^{10} + x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je právě koeficient u x^{22} ve výsledném polynomu.

Heslo dne: – „spojité a diskrétní metody se vzájemně potřebují"

Example

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme Colu za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla i, j a k taková, že $i + j + k = 22$ a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \;\; j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \;\; k \in 0, 1, 2, 3.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(x^5 + x^{10} + x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je právě koeficient u x^{22} ve výsledném polynomu.
Skutečně tak dostáváme 4 možnosti $3 * 5 + 3 * 2 + 1 * 1$, $3 * 5 + 2 * 2 + 3 * 1$, $2 * 5 + 5 * 2 + 2 * 1$ a $2 * 5 + 4 * 2 + 4 * 1$.

Příklad zasluhuje větší pozornost:
Jestliže budeme (pro jistotu, abychom nemuseli předem dělat odhady velikostí) pracovat s nekonečnými posloupnostmi, pak pomocí jednotlivých korun umíme dosáhnout hodnot $0, 1, 2, \dots$ s četnostmi

$$(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

(pokračují samé nuly), u dvoukorun

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

a u pětikorun to budou poslounosti četností

$$(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

Příklad zasluhuje větší pozornost:
Jestliže budeme (pro jistotu, abychom nemuseli předem dělat odhady velikostí) pracovat s nekonečnými posloupnostmi, pak pomocí jednotlivých korun umíme dosáhnout hodnot $0, 1, 2, \dots$ s četnostmi

$$(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

(pokračují samé nuly), u dvoukorun

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

a u pětikorun to budou poslounosti četností

$$(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

Ke každé takové posloupnosti s konečně mnoha nulovými členy můžeme přiřadit polynom a hodou okolností řešení naší úlohy bylo možné odečíst ze součinu těchto polynomů.

Definition

Vytvořující funkce pro nekonečnou posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ je (formální) mocninná řada

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i .$$

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami zleva.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami zleva.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k.
- Dosazením monomu $f(x)$ za x vytvoříme specifické kombinace členů původní posloupnosti. Jednoduše je vyjádříme pro $f(x) = \alpha x$, což odpovídá vynásobení k–tého členu posloupnosti skalárem α^k. Dosazení $f(x) = x^n$ nám do posloupnosti mezi každé dva členy vloží $n - 1$ nul.

Plán přednášky

Uvedeme několik jednoduchých příkladů vytvořujících funkcí. Řadu z nich jsme viděli při práci s mocninnými řadami ve třetí části šesté kapitoly. Snad si všichni vzpomenou na vytvořující funkci zadanou geometrickou řadou:

$$a(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

která tedy odpovídá konstantní posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$. Obecně, pro každou posloupnost a_i s členy velikosti $|a_n| = O(n^k)$ s konstantním exponentem k, konverguje její vytvořující funkce na nějakém okolí nuly. Můžeme s ní pak opravdu na konvergenčním intervalu zacházet jako s funkcemi, zejména je umíme sčítat, násobit, skládat, derivovat a integrovat.