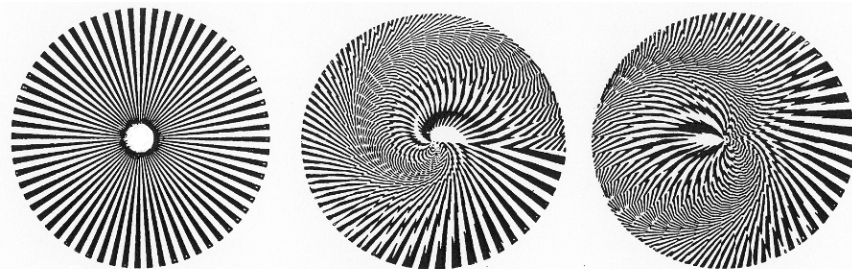


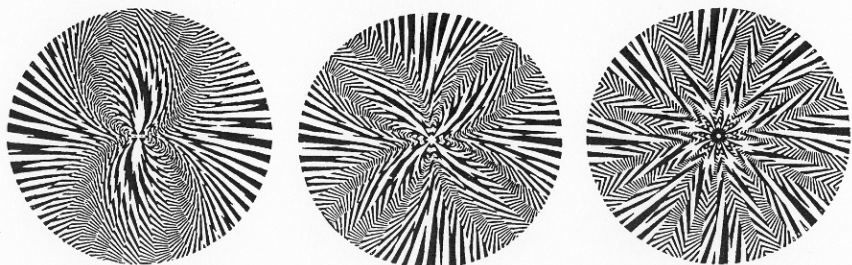
Moire – efekt překrývání rastrů (nejčastěji AND)

Př.



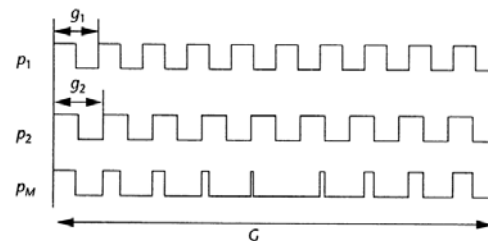
podkladový rastr

5 kombinací



V praxi tisku je moire jevem nežádoucím!

Skládání rastrů různých frekvencí (J. Blin)



$$p_M = p_1 \text{ AND } p_2,$$

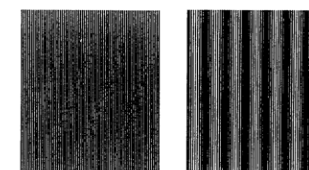
$$G = n g_2 = (n+1) g_1, \quad 1/g_2 = n/G, \quad 1/g_1 = (n+1)/G,$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2}, \quad f = 1/g, \quad F = f_1 - f_2$$

Př. Čárový rastr



Efekt různých frekvencí rastrů



Efekt vzájemného posunutí je podobný

Vzájemné posunutí rastrů

Př:

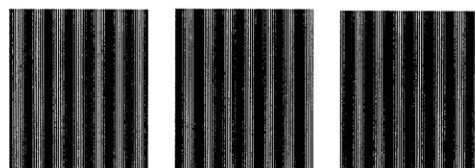
$$\delta = g_2/2, \quad \Delta = G/2.$$

$$\delta = g_2/4, \quad \Delta = G/4.$$

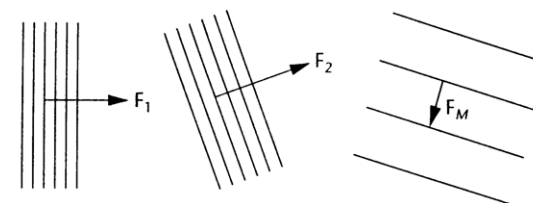
Obecně:

$$\Delta = \delta \left(\frac{G}{g_2} \right)$$

Efekt vzájemného posunutí rastrů:



Vzájemné natočení čárových rastrů

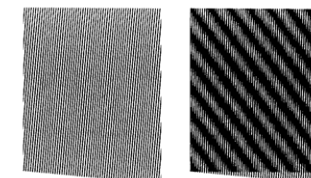


$$\mathbf{F}_M = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$$

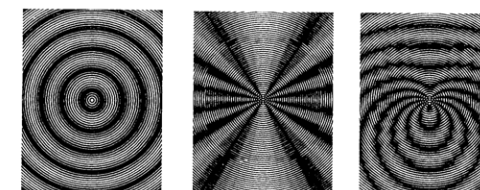


Kruhový rastr

Efekt vzájemného natočení



Různé typy rastrů vytvářejí různé vzory



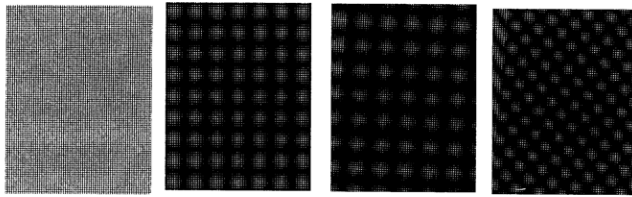
změna frekvence

posunutí středů

obě změny

Různé typy rastrů vytvářejí různé vzory

Pravouhlá síť

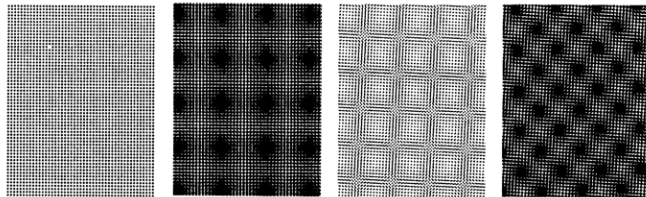


Bodový rastr

změna frekvence

natočení

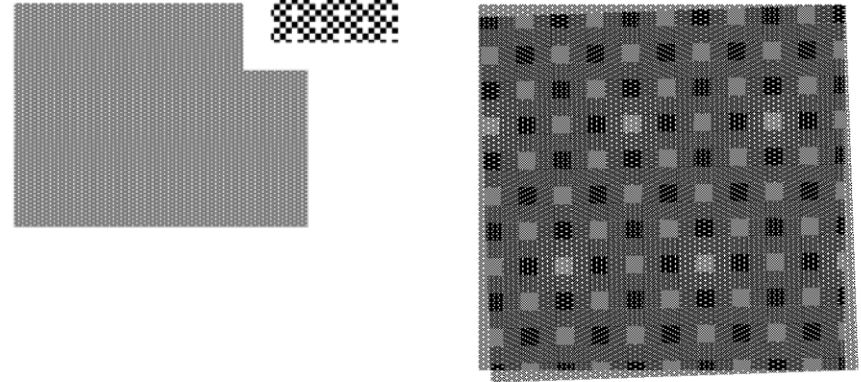
obě změny



Moire vzniká i při převzorkování

Př. 1

Efekt přerastrování 72dpi na 300dpi



Vznik moire je vážným problémem velkoformátových a vysoce kvalitních tisků.

Doplňme: Úprava obrazu pro tisk

Původní obrazové body (pixels) je třeba sejmout a přetransformovat novým polotónováním

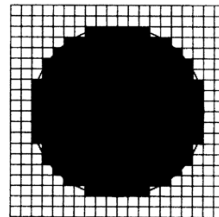
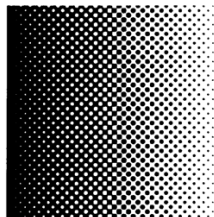
Osvitové jednotky 1200 dpi - 5000 dpi

Autotypický řádek

rastr udáván v řádcích př. $2540 \text{ dpi} / 16 = 158 \text{ lpi} = 62 \text{ lpc}$ (lpc = lpi/2.54)

256 odstínů polotónováním v bloku 16 x 16

Autotypický rastr - tvar bodu

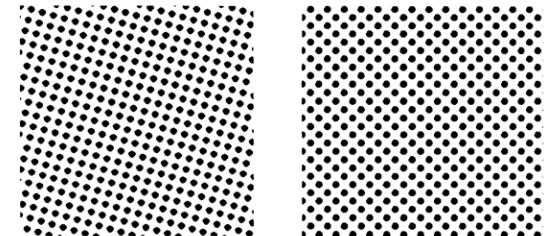
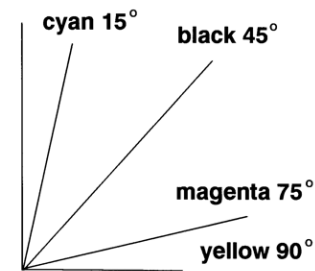


kruh, elipsa, čtverec

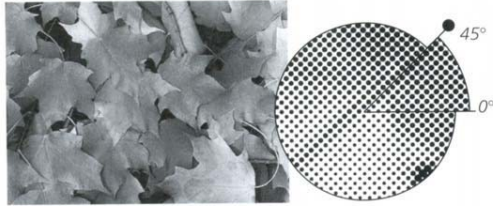
kombinace



Natáčení barev (barevných rastrů) – vytváření tiskových rozet

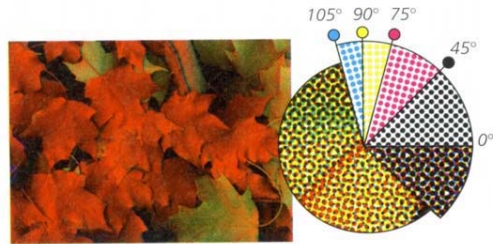


Tiskové rozety



Poznámka:

Barevné růžice jsou dobře viditelné na velkých reklamních poutáčích.



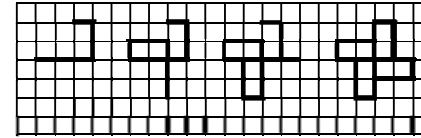
9

Spirolaterály (Spirolaterals)

Křivky podobné SFK – Frank C. Odds (biolog) 1973, Robert Krawczyk (architekt) 1999 a další.

Algoritmus – opakované navazování tvořící křivky (polyline o n segmentech).
Grafický interpret – „želví grafika“.

Př. 1. Křivka 3. řádu (polyline má 3 segmenty) 4-násobné repetice:



Poznámka:
Kreslíme vlastně spirálu, odtud název křivky.

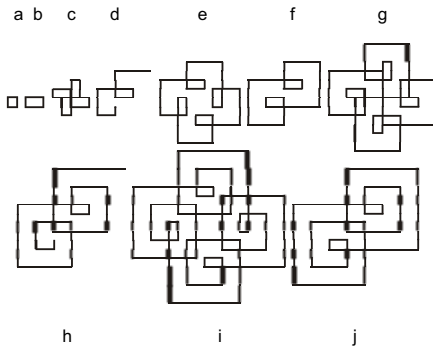
Algoritmus:..
krok 0. – nastavení výchozího směru
krok 1. – otočení o zadaný úhel doprava a vykreslení 1. segmentu o délce 1
– otočení o zadaný úhel doprava a vykreslení 2. segmentu o délce 2
– otočení o zadaný úhel doprava a vykreslení 3. segmentu o délce 3
kroky 2., 3., 4. – opakování kroku 1.

Parametry křivky:

α – úhel sevržený segmenty po otočení ($\pi - \alpha$) v dohodnutém směru
 n – počet segmentů
 m – počet opakování (do uzavření křivky)

10

Problém uzavírání křivky ($m = ?$)



Př. 2. Křivky
 $\alpha = \pi/2$
 $n = 1-10$

Součet úhlů:

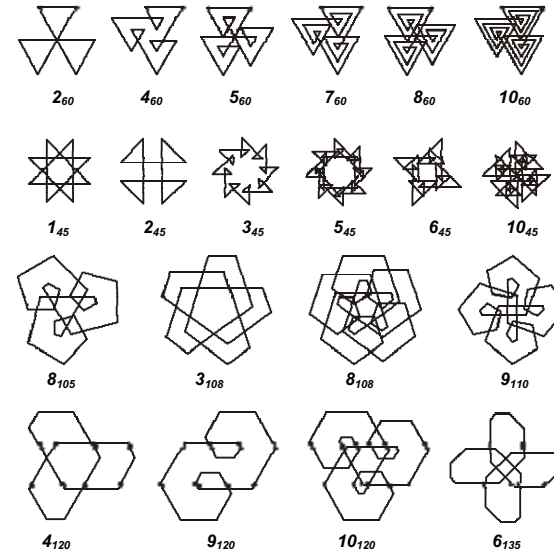
- a. $90^\circ \times 1 \times 4 = 360^\circ$ b. $90^\circ \times 2 \times 2 = 360^\circ$ c. $90^\circ \times 3 \times 4 = 1080^\circ$ d. $90^\circ \times 4 \times 1 = 360^\circ$
e. $90^\circ \times 5 \times 4 = 1800^\circ$ f. $90^\circ \times 6 \times 2 = 1080^\circ$ g. $90^\circ \times 7 \times 4 = 2520^\circ$ h. $90^\circ \times 8 \times 1 = 360^\circ$
i. $90^\circ \times 9 \times 4 = 3240^\circ$ j. $90^\circ \times 10 \times 2 = 1800^\circ$

Odds ukazuje, že pokud součtový úhel dosáhne 360° po prvním běhu ($m = 1$), křivka se neuzavře. Domnívá se, že pokud je α celistvým dělitelem 180° , křivka se uzavře. Krawczyk testováním ukazuje, že to není pravda.

Matematická analýza chybí!!!

11

Ukázky testů (notace n_α)

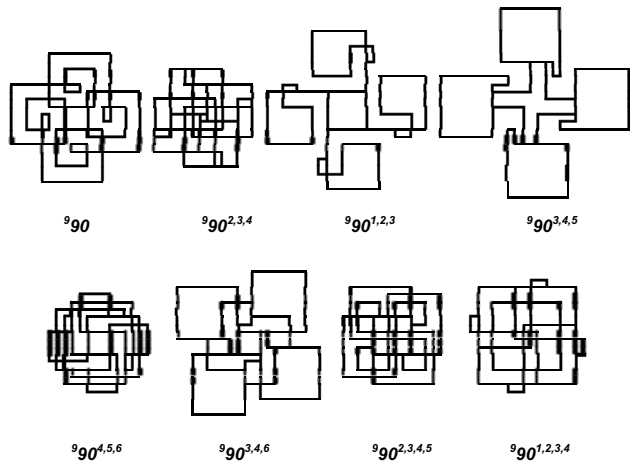


Další variace spirolaterál přinášejí další výtvarné efekty

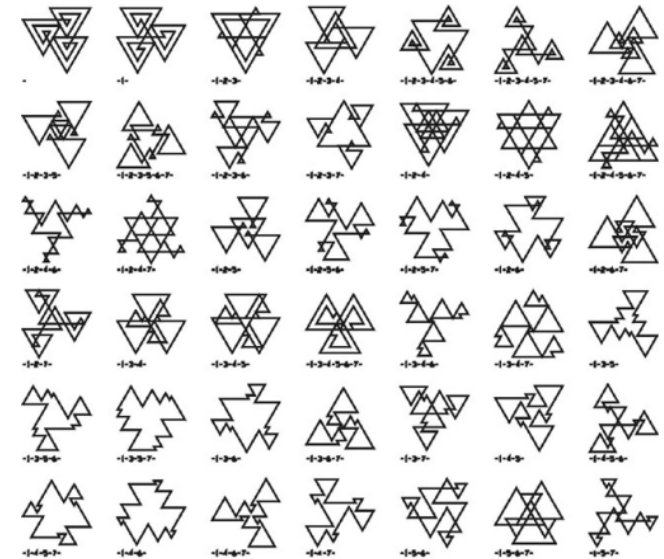
12

Reverzace směrů otáčení

Př. notace: ${}^9 90^{2,3,4}$ pravé indexy určují segmenty reverzace

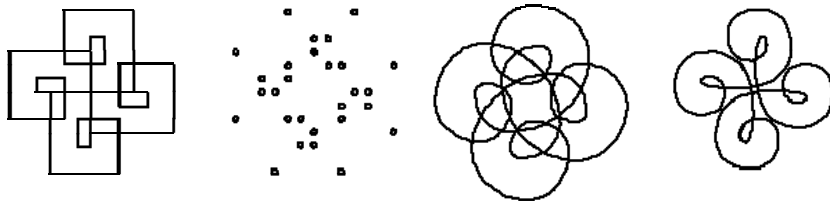


Př. Variace na ${}^7 60$:

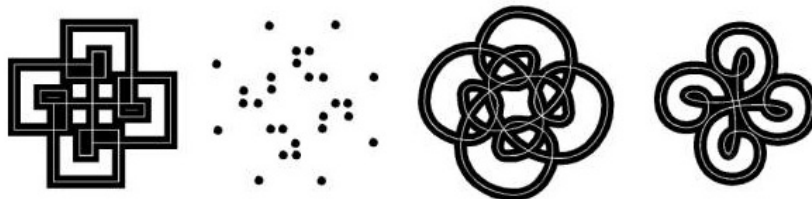


Další výtvarné zpracování spirolaterál:

Náhrada úsečky v polyline jinou čarou,



resp. jiným provedením (typem) čáry.



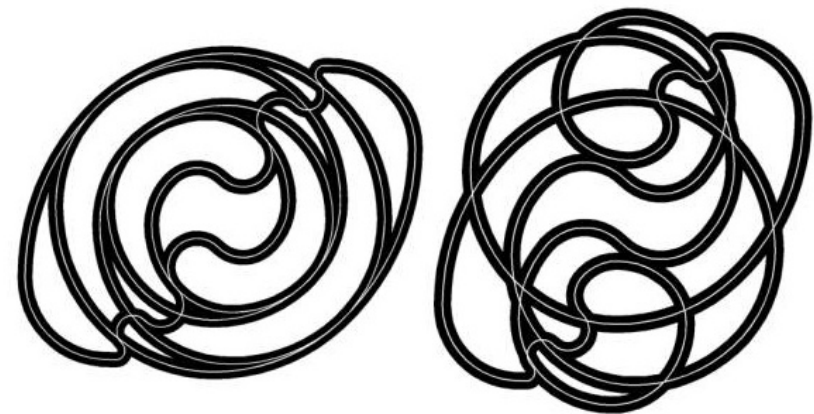
úsečky

vrcholy

kruh. oblouky

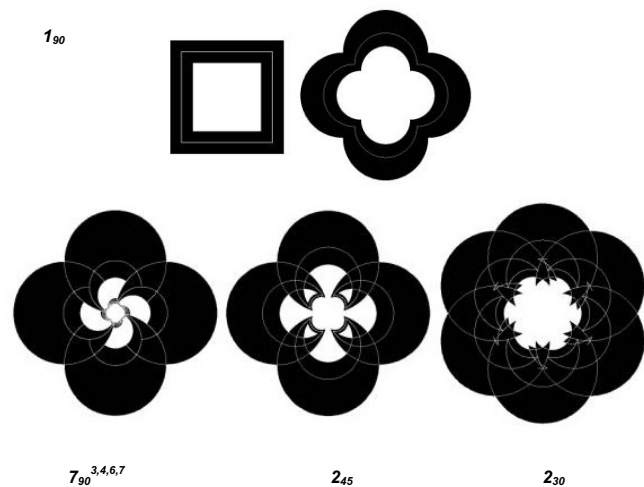
spline

Př. Efektní spirolaterály ${}^{14} 90$:



Jednoduché transformace a projekce

Př. transformace Dixona a Lawrence $X = (x * r^2) / (x^2 + y^2)$ $Y = (y * r^2) / (x^2 + y^2)$

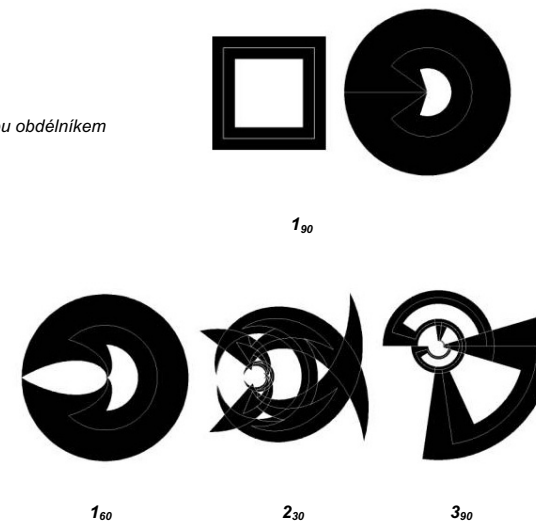


Př. Transformace „antiMERCATOR“

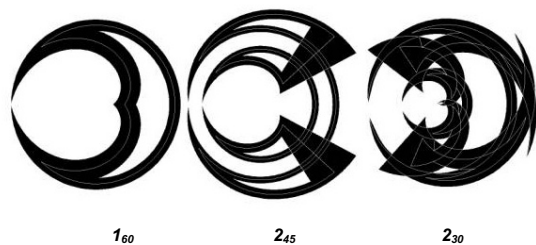
$\theta = k * x$ $k = 2\pi/(x_{max}-x_{min})$
 $R = \exp(k * y)$

Poznámka:

M. projekce-obalení globu obdélníkem



Varianta bez exponenciály

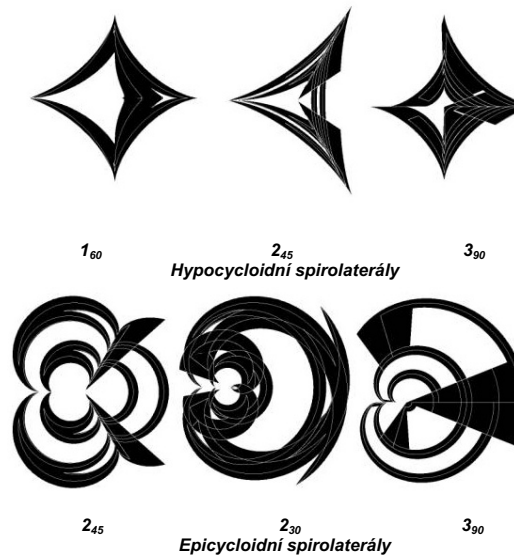


Cykloidní transformace

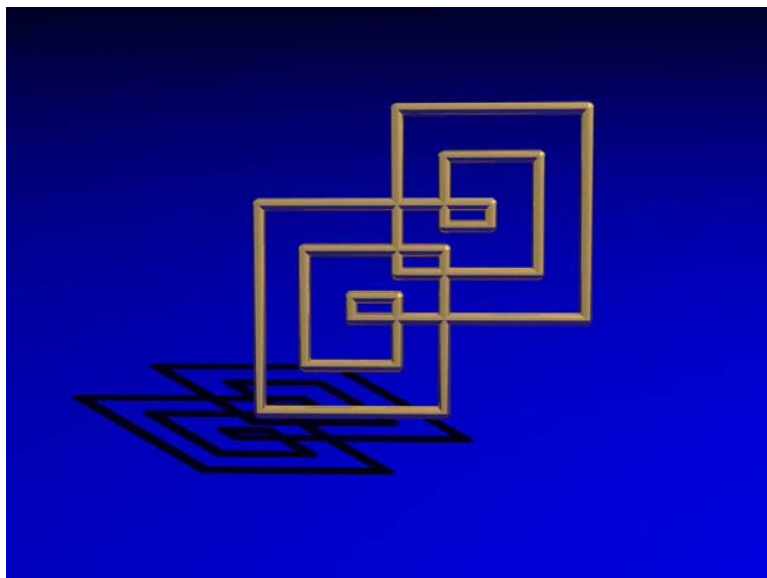
Hypocycloida: $X = R * (\cos(A)^{(n-1)} + \cos(A^{*(n-1)}))$ $n = 3$ a 4
 $Y = R * (\sin(A)^{(n-1)} - \sin(A^{*(n-1)}))$

Epicycloida: $X = R * (\cos(A)^{(n+1)} - \cos(A^{*(n+1)}))$ $n = 2, 3$ a 4
 $Y = R * (\sin(A)^{(n+1)} - \sin(A^{*(n+1)}))$

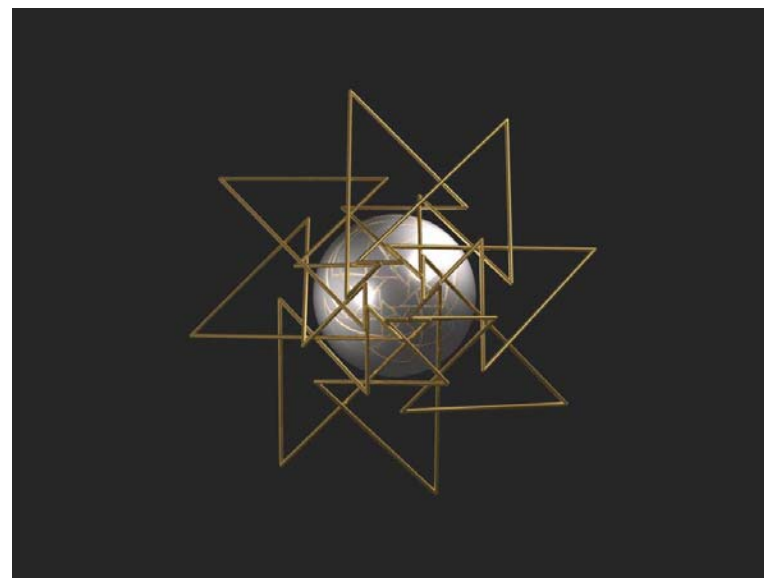
Příklady cykloidních transformací:



Př. Varianty 3D



21



22

Dekorativní chaotické atraktory 1 (Julien C. Sprott: Strange Attractors)

Nejjednodušší a nejznámější iterační mapa (2D)

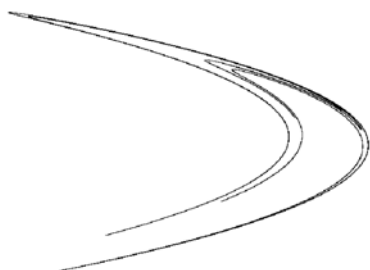
jejíž atraktor nám poslouží jako příklad:

(Michel Hénon 1976)

$$X_{n+1} = 1 + \alpha X_n^2 + b Y_n$$

$$Y_{n+1} = X_n \quad \alpha = -1.4 \text{ and } b = 0.3.$$

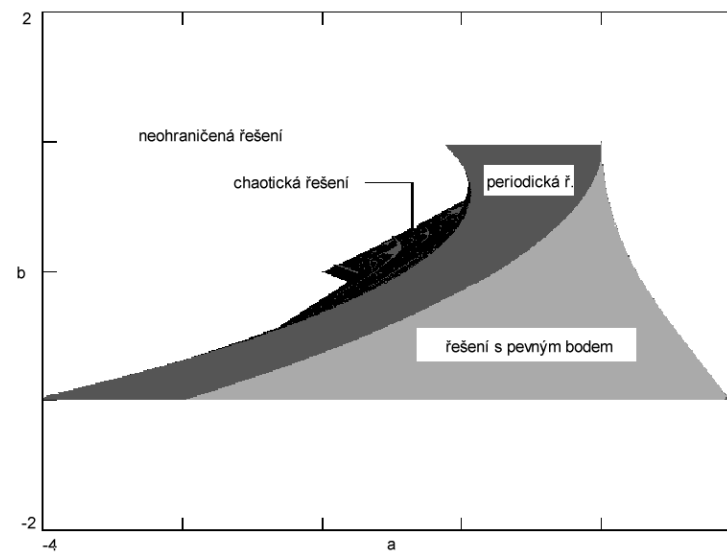
Po několika iteracích vznikne „ladná“ chaotická křivka:



23

Chaotický atraktor vznikne jen v omezeném rozsahu parametrů:

Oblasti řešení Hénonovy rovnice v souřadnicích a, b



24

Hénonův atraktor je zvláštním případem obecnější kvadratické mapy

$$X_{n+1} = a_1 + a_2 X_n + a_3 X_n^2 + a_4 X_n Y_n + a_5 Y_n + a_6 Y_n^2$$

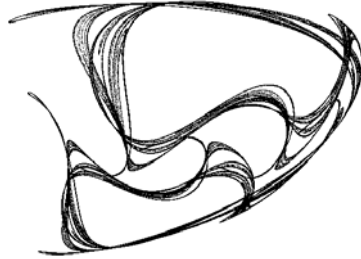
$$Y_{n+1} = a_7 + a_8 X_n + a_9 X_n^2 + a_{10} X_n Y_n + a_{11} Y_n + a_{12} Y_n^2$$

Při vhodných hodnotách parametrů najdeme oblasti velmi dekorativních atraktorů.

Hledání má háček!

Př. Hledáme-li 12 koeficientů v intervalu $-1,2$ až $+1,2$ po kroku $0,1$, dostaneme kolem 6×10^{16} různých řešení a z nich pouze asi 10^{15} bude chaotických, tj. $1,6\%$. Kdyby jednotlivá řešení trvala pouze jednu vteřinu potřebovali bychom 30 milionů let. Proto J. C. Sprott náhodně generuje parametry a vybírá pomocí exponentů Ljapunova a fraktální dimenze (viz později).

Př. Atraktor dvojdimenzionální kvadratické mapy:



Podobně můžeme sestavit mapu kubickou, kvartickou, kvintickou apod.

Kubická mapa:

$$X_{n+1} = a_1 + a_2 X_n + a_3 X_n^2 + a_4 X_n^3 + a_5 X_n^2 Y_n$$

$$+ a_6 X_n Y_n + a_7 X_n Y_n^2 + a_8 Y_n + a_9 Y_n^2 + a_{10} Y_n^3$$

$$Y_{n+1} = a_{11} + a_{12} X_n + a_{13} X_n^2 + a_{14} X_n^3 + a_{15} X_n^2 Y_n$$

$$+ a_{16} X_n Y_n + a_{17} X_n Y_n^2 + a_{18} Y_n^3 + a_{19} Y_n^2 + a_{20} Y_n^3$$

Počet koeficientů poroste a hledání chaotických atraktorů bude obtížnější!

Př. Atraktor dvojdimenzionální kubické mapy:



Př. Atraktor kvartické mapy promítnutý na kouli:



Můžeme přejít do vícerozměrného prostoru (3D, 4D).

Kvadratická mapa 3D:

$$X_{n+1} = a_1 + a_2 X_n + a_3 X_n^2 + a_4 X_n Y_n + a_5 X_n Z_n + a_6 Y_n$$

$$+ a_7 Y_n^2 + a_8 Y_n Z_n + a_9 Z_n + a_{10} Z_n^2$$

$$Y_{n+1} = a_{11} + a_{12} X_n + a_{13} X_n^2 + a_{14} X_n Y_n + a_{15} X_n Z_n + a_{16} Y_n$$

$$+ a_{17} Y_n^2 + a_{18} Y_n Z_n + a_{19} Z_n + a_{20} Z_n^2$$

$$Z_{n+1} = a_{21} + a_{22} X_n + a_{23} X_n^2 + a_{24} X_n Y_n + a_{25} X_n Z_n + a_{26} Y_n$$

$$+ a_{27} Y_n^2 + a_{28} Y_n Z_n + a_{29} Z_n + a_{30} Z_n^2$$

Dvojdimenzionální obraz můžeme pořídit několika způsoby:

• Provedeme skutečně projekci do 2D

$$X_p = -X \sin \theta + Y \cos \theta$$

(úhly definují směr pohledu).

$$Y_p = -X \sin \theta \cos \phi - Y \sin \theta \cos \phi + Z \sin \phi$$

• „Nadbytečnou“ souřadnici ignorujeme.

• „Nadbytečnou“ souřadnici vyjádříme barvou.

• Atraktory zobrazíme v řezech po vhodném kroku ve zvolené souřadnici.

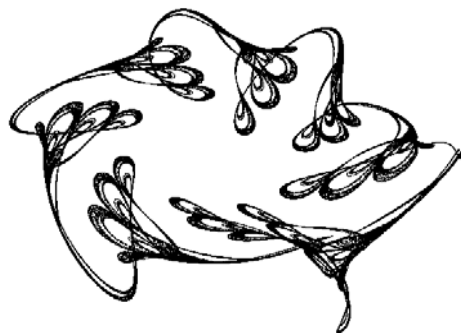
• Kombinujeme uvedené metody apod.

Počet koeficientů stále narůstá! Atraktivnost atraktorů roste.

Př. Projekce 3D kvadratické mapy



Př. Projekce 3D kubické mapy



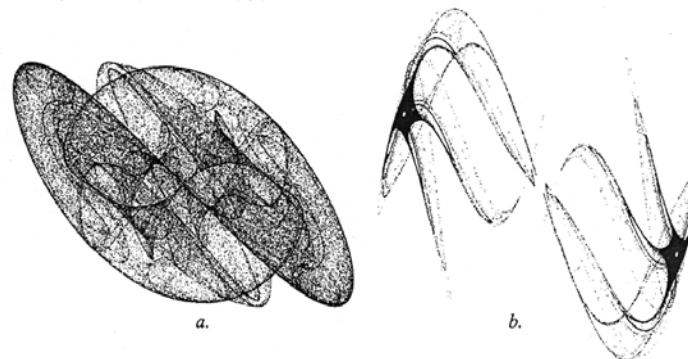
Chaotické atraktory jsou polem nekonečných výtvarných možností (viz. práce J. C. Sprotta).

Trigonometrické funkce ve 2D rovnicích

Clifford Pickover:

$$x_{t+1} = \sin(by_t) + c \sin(bx_t)$$

$$y_{t+1} = \sin(ax_t) + d \sin(ay_t)$$

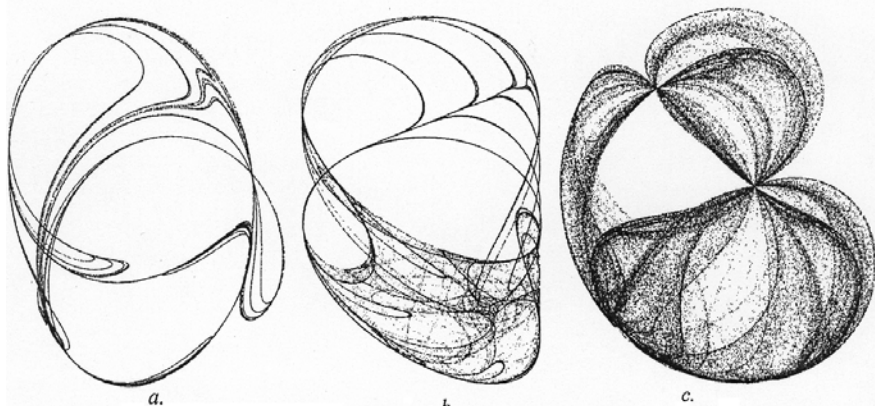


(a, b, c, d): a = (-2.90, -2.03, 1.44, 0.70); b = (-2.16, -0.64, 1.2, 1.00)

Paul Bourke:

$$x_{t+1} = \sin(ay_t) - \cos(bx_t)$$

$$y_{t+1} = \sin(cx_t) - \cos(dy_t)$$

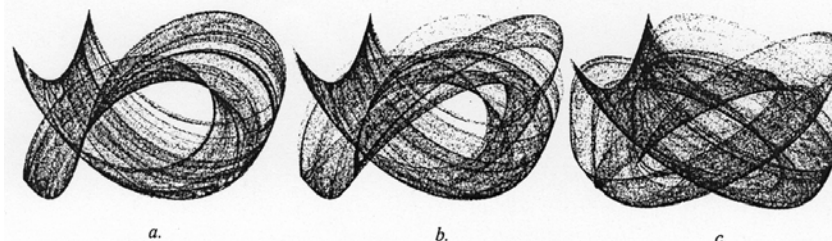


(a, b, c, d): a = (-2.24, 0.43, -0.65, -2.43); b = (-2.70, -0.08, -0.86, -2.20);
c = (-2.00, -1.00, -1.00, -1.50).

Varianta s mocninou:

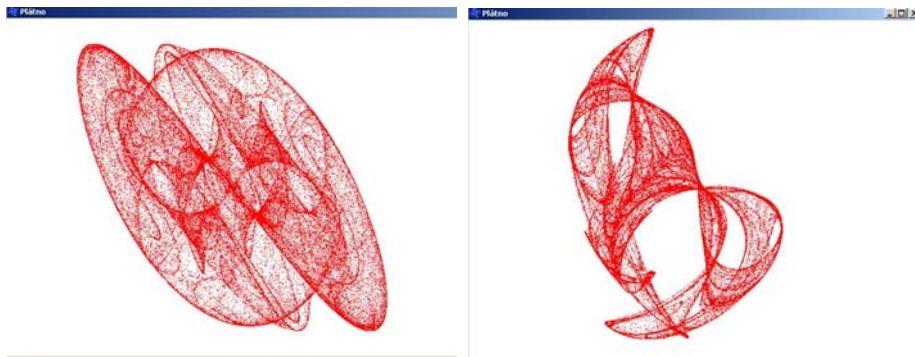
$$x_{t+1} = |\sin^3(ay_t)| + \cos(bx_t)$$

$$y_{t+1} = |\sin^2(cx_t)| - \cos^2(dy_t)$$



(a, b, c, d): a = (-5.0, -0.5, -1.1, 7.5); b = (-5.25, -0.5, -1.1, 7.5); c = (-6.0, -0.5, -1.1, 7.5)

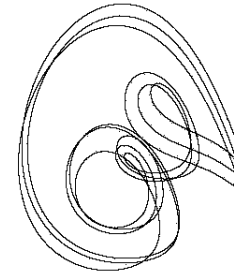
Generátor rovnic Pickovera a Bourkeho (Tomáš Jochec VIN VUT 06)



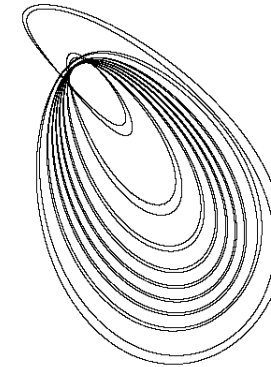
33

Dekoratívni mezní cykly ODR (3D)

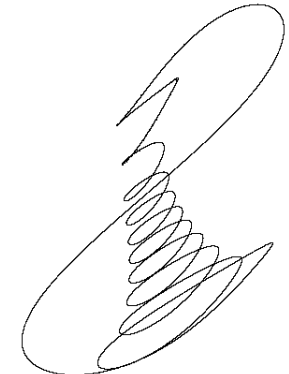
kvadratická



kvadratická



kubická



34

Dekoratívni chaotické atraktory 2 (nepravé)

(J. C. Sprott: Strange Attractors 1993)

Eulerova numerická metoda řešení ODR jako zdroj chaotických tvarů

Mějme dvojrozměrný systém autonomních ODR

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,y) \\ dy/dt &= g(x,y) \end{aligned}$$

Podle Poincaré-Bendixsonova teoremu tento systém nemůže produkovat chaotická řešení.

Použijeme-li však k řešení „vhodnou“ numerickou metodu, resp. dostatečně velký integrační krok h , může být řešení chaotické.

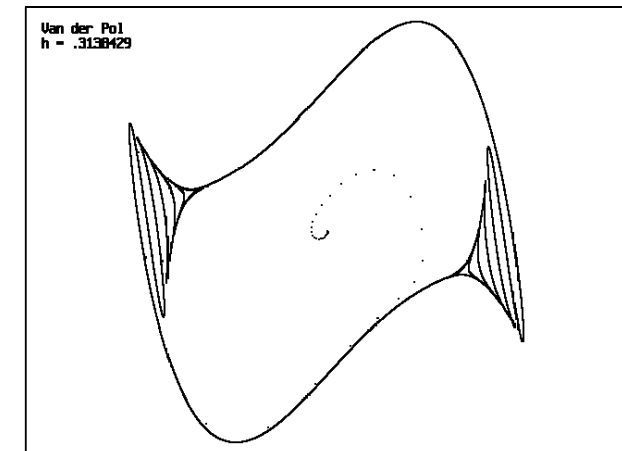
Použijeme Eulerovu numerickou metodu

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_n, y_n) \end{aligned}$$

35

Př. 1: Řešme Van der Polovu rovnici:

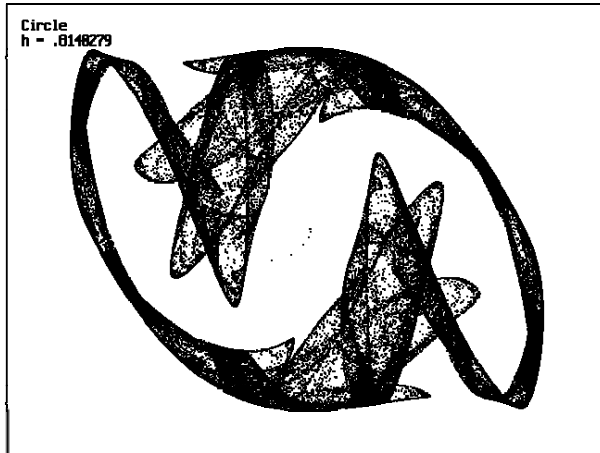
$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= b(1-x^2)y - x \\ \text{pro } b &= 1, \\ \text{p. p. } x_0 &= y_0 = 0,01 \end{aligned}$$



36

Př. 2: Podobný systém, který má kruhový mezní cyklus ($x^2 + y^2 = 1$), bude při dostatečně velkém h produkovat chaotický atraktor.

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= (1 - x^2 - y^2)y - x \\ \text{pro p. p. } x_0 &= y_0 = 0,01 \end{aligned}$$



37

Doplnění:

Z fyziky známé („populární“) chaotické systémy

Logistická rovnice (R. May, 1976)

$$X_{n+1} = AX_n(1 - X_n) \quad A = 4$$

Hénonova rovnice (M. Hénon, 1976)

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 + Y_n - aX_n^2 \\ Y_{n+1} &= bX_n \end{aligned} \quad a = 1.4, b = 0.3$$

Chirikovova (standardní) rovnice (B. V. Chirikov, 1979)

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + Y_{n+1} \text{ mod } 2\pi \\ Y_{n+1} &= Y_n + k \sin X_n \text{ mod } 2\pi \end{aligned} \quad k = 1$$

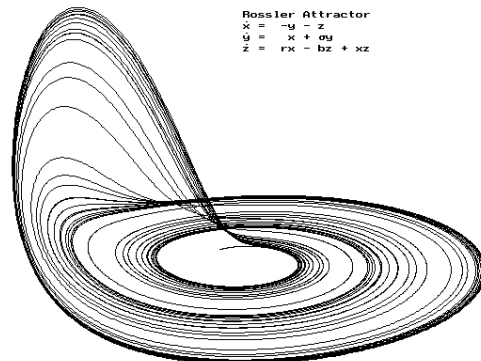
Lorenzův atraktor (E. N. Lorenz, 1963)

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y - x) \\ dy/dt &= -xz + rx - y \\ dz/dt &= xy - bz \end{aligned} \quad \sigma = 10, r = 28, b = 8/3$$

38

Rösslerův atraktor (O.E. Rössler, 1976)

$$\begin{aligned} dx/dt &= -y - z \\ dy/dt &= x + ay \\ dz/dt &= b + z(x - c) \end{aligned} \quad a = b = 0.2, c = 5.7$$



Uedův atraktor (Y. Ueda, J. 1979)

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -x^3 - ky + B \sin z \\ dz/dt &= 1 \end{aligned} \quad B = 7.5, k = 0.05$$

Model chaotického proudění se ztrátami

a) kvadratický (J. C. Sprott, 1977)

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= z \\ dz/dt &= -Az + y^2 - x \end{aligned} \quad A = 2.017$$

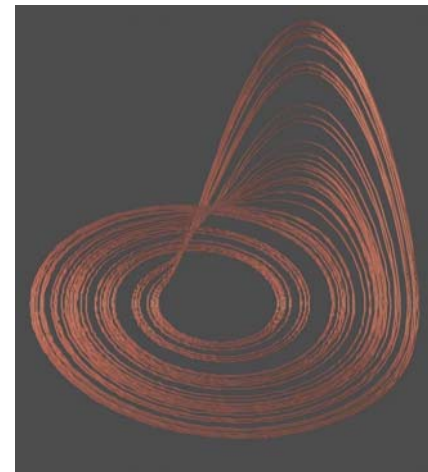
b) po částech lineární (J. C. Sprott, 1999)

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= z \\ dz/dt &= -Az - y - |x| + 1 \end{aligned} \quad A = 0.6$$

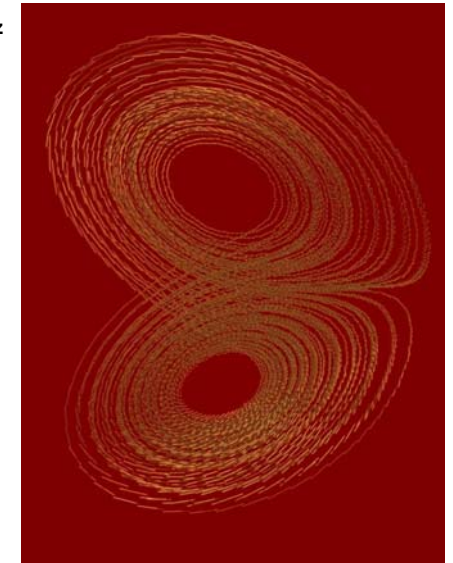
39

Př. Atraktory

Rössler



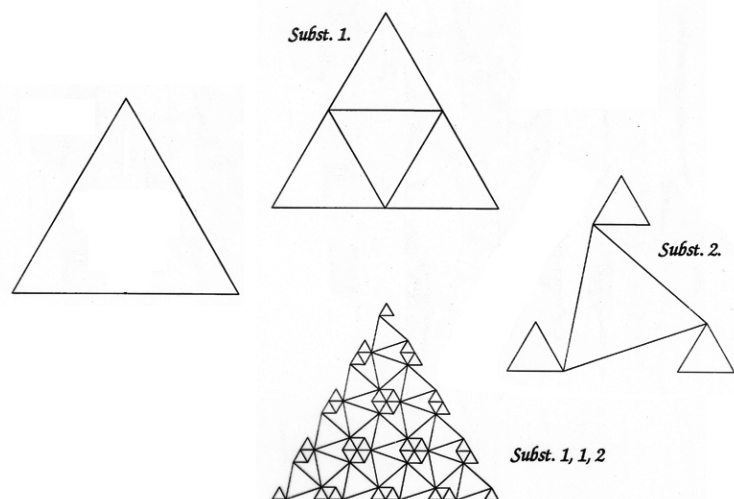
Lorenz



40

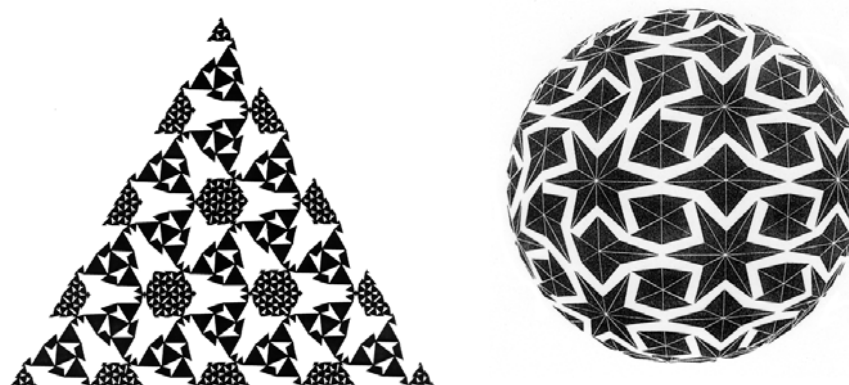
Efekt geometrických substitucí

Substituce obrazců:



41

Př. Geometrické substituce v rovině a na kouli s vyplněnými obrázky.



Viz. téma Mozaiky geometrickou substitucí.

42

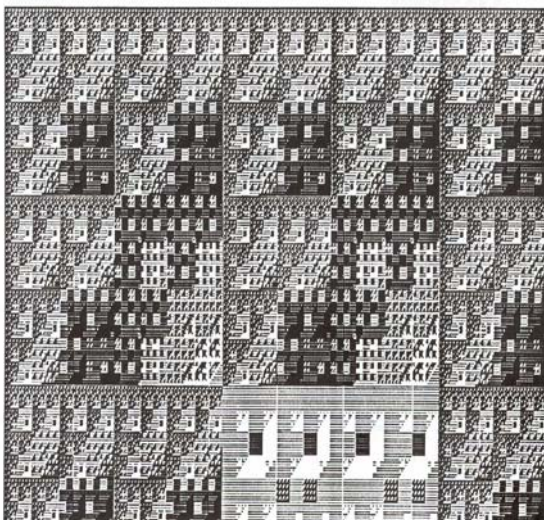
Generátory používající logické operátory

Př.

M. Szyszkowicz:

$$a_{n+1} = a_n \text{ OR } b_n,$$

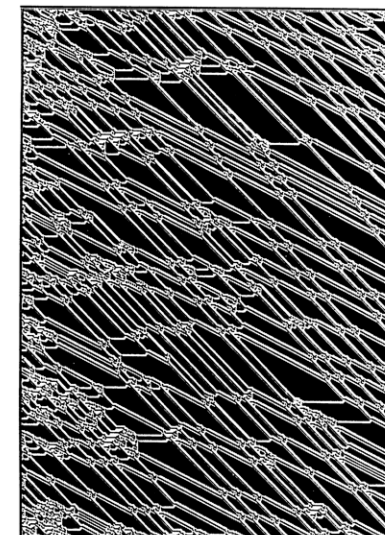
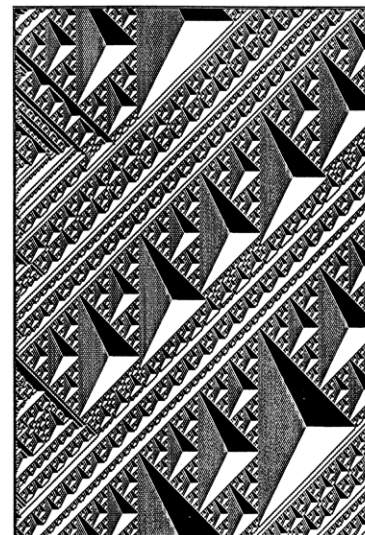
$$b_{n+1} = \sqrt{(a_n \text{ AND } b_n)}$$



43

Generátory používající celulární automaty

Typický vzhled kreací (př. Ventian Li):



44

Grafický Turingův stroj

Připomeňme: Turingův stroj (TS) se skládá z konečné množiny stavů, nekonečné pásky a hlavičky, která může číst i zapisovat na pásku a pohybovat se po ní doprava nebo doleva. V každém kroku TS přečte symbol z místa pásky, na kterém je nastavena hlavička. Na základě tohoto symbolu a stavu, ve kterém se právě nachází, přejde podle přechodové funkce do nového stavu. Zapiše na aktuální místo pásky symbol a posune hlavičku na pásku doleva nebo doprava.

Implementace TS: Množinu stavů budeme reprezentovat jejich indexy a páskovou abecedu vytvoří indexy barev. Jednotlivá místa na páse jsou jednotlivé pixely na obrazovce a znaky jsou reprezentovány barvami pixelů. Pro reprezentaci přechodové funkce vytvoříme 3 dvojrozměrné tabulky:

- Tabulku pro určení nového stavu na základě aktuálního stavu a znaku na páse (barvy pixelu)
- Tabulku pro určení znaku zapisovaného na pásku (barvu kresleného pixelu)
- Tabulku pro směr pohybu (nahoru, dolů, doleva, doprava)

V každém kroku algoritmu se na základě aktuálního stavu a barvy aktuálního pixelu určí nový stav a směr dalšího kroku.

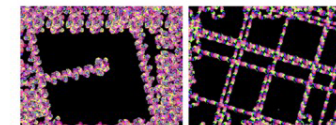
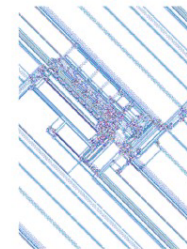
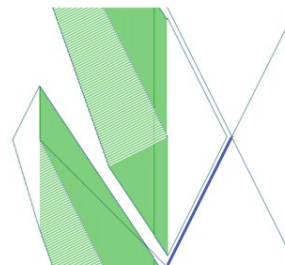
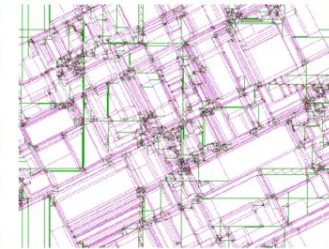
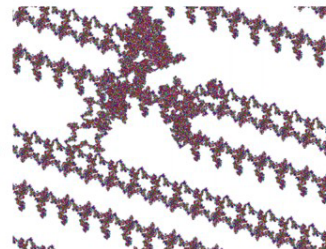
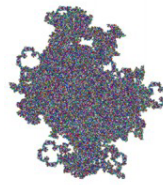
Poznámka: Zvětšení omezeného prostoru obrazovky dosáhneme spojením levého okraje obrazovky s pravým a horního s dolním. Varietu výstupů rozšíříme tiskem grafických značek a vhodným zpracováním míst „přetisku“.

45

Výsledky:

Grafický Turingův stroj

(V. Kadlec a další)



"ruční" nastavení:



46