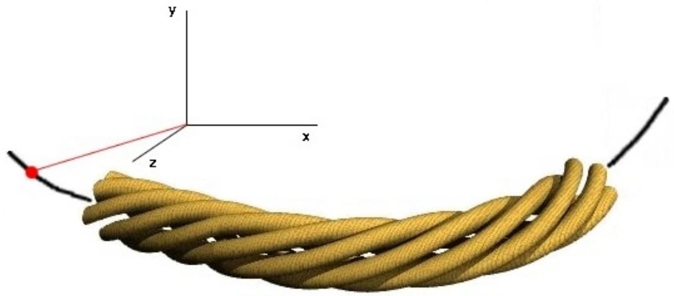
ALGORITMY UZLŮ

TEORIE UZLŮ PATŘÍ TOPOLOGII
Studium uzlů vychází z abstrakce uzlového vlákna (provazce).

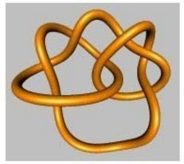
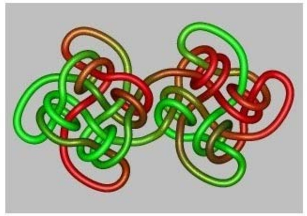
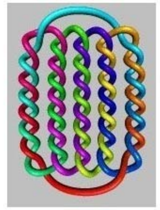
<u>Zobrazení uzlu</u> předpokládá znalost geometrie osy vlákna - struktury zapletení.
Pro realistické zobrazení uzlu použijeme metod počítačové grafiky.

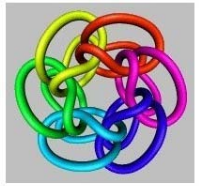
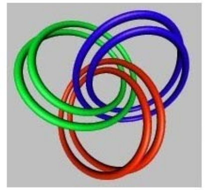


Poznámka: **Praktické aplikace modelují vlákno pomocí teorie pružnosti a pevnosti s různou výpočetní náročností (smotek struny, … , textilní úplet).**

DEKORATIVNÍ UZLY, SPOJKY A PLETENCE

Díky své strukturální komplikovanosti vytvářejí uzly esteticky zajímavé kreace.

Střípky z teorie uzlů (Robert G. Scharein, 1998, KNOTPLOT)

Matematickým uzlem (knot) rozumíme jednoduchou uzavřenou křivku umístěnou v třídimenzionálním Euklidovském prostoru R^3.

Uzlem je i <u>spojka</u> (link).


Některé uzly mají <u>lokální jména</u>:

čtvercový uzel

babiččin uzel

Poznámka: **Např. Čeština zná pletení, proplétání, zaplétání, splétání, oplétání, vplétání, … uzly, smyčky, kličky, spojky, svazky, šňůry, pletence, copy …**

První úlohou matematiky (resp. topologie) je rozhodnutí o ekvivalenci dvou uzlů.

Dva obrazy jednoho uzlu:

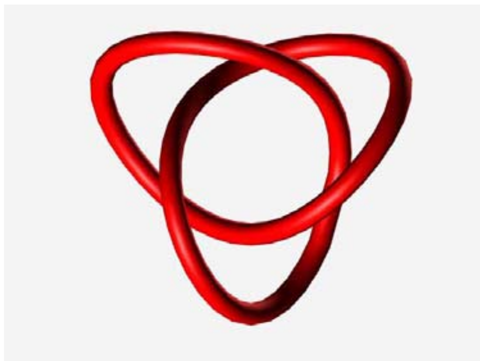



Diagram uzlu

Projekce uzlu do roviny vytvoří jednoduchou prezentaci - planární graf, tzv. diagram uzlu.

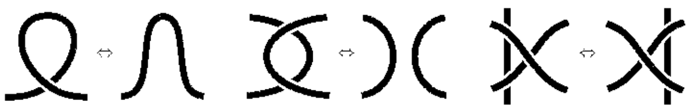
Vrcholy grafu budou body křížení provazců a popíšeme je + (nad) a – (pod) podle dohody.

Provazce vytvoří hrany grafu.

křížení:

K. Reidemeister v r. 1935 dokázal, že dva uzly jsou stejné tehdy a jen tehdy, mají-li stejné uzlové diagramy.
Resp. tehdy, je-li možné přetransformovat jeden diagram v druhý bez přerušení provazce.

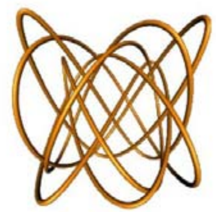
Pro tento převod definoval tři typy transformací (pohybů):



Př. Efekt transformací

Lissajousovy parametrické uzly

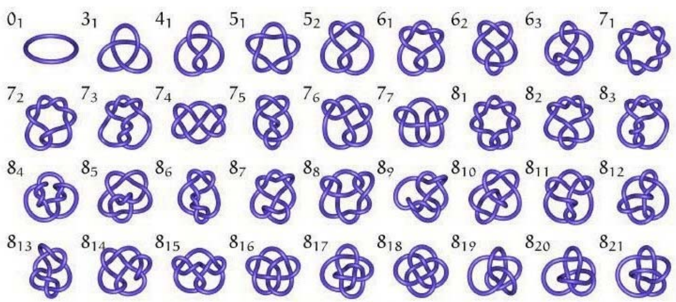
$$x(t) = cos(n_x t + \phi_x)$$
$$y(t) = cos(n_y t + \phi_y)$$
$$z(t) = cos(n_z t + \phi_z)$$



Minimální projekce uzlů

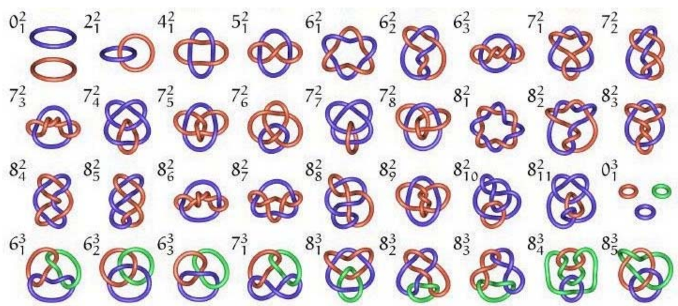
Projekcí daného uzlu do roviny je mnoho a proto matematikové hledají projekce s nejmenším počtem křížení.
Nelze-li již uzly dělit na jednodušší elementy, nazývají se *prvouzly* (prime knots) a autoři je pak zařazují do katalogů uzlů (od r. 1927).

Katalogové prvouzly :



… atd.

Podobně katalogové spojky:

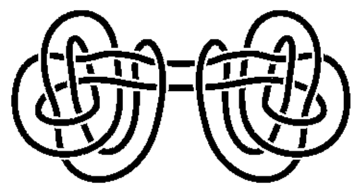


… atd.

Na všechny uzly a spojky však Reidermeisterovy transformace nestačí.

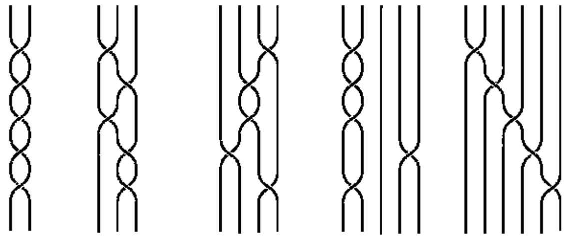
Např. Freedmanův uzel:

Spojení dvou triviálních uzlů „0“.



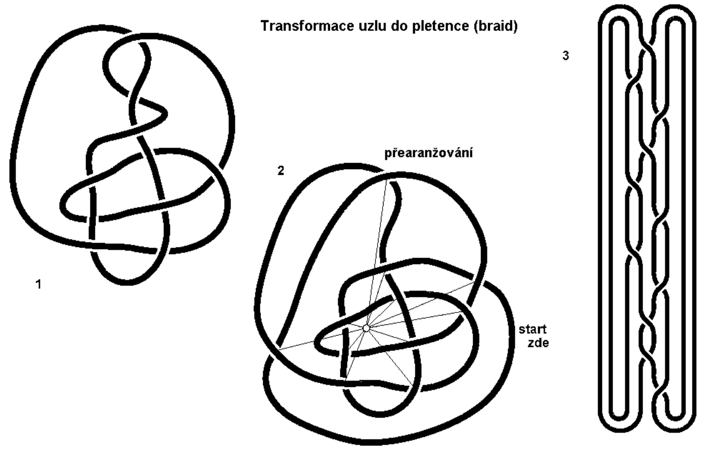
Šňůry, copy a pletence

šňůry o 2 až 6 pramenech



Tyto útvary je třeba nejdříve volnými deformacemi změnit v uzly.

Opačná cesta je obtížnější.

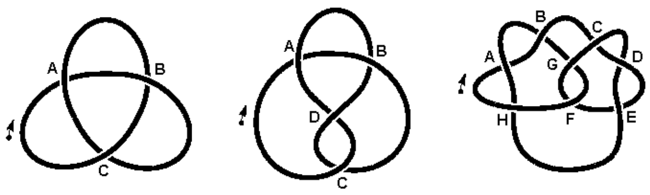


Zápis uzlů

Zápis uzlů řetězci znaků

Nic moc nového!

Gaussovo kódování



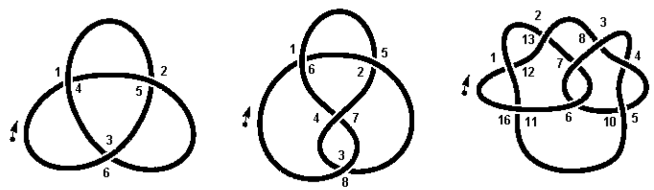
ABCABC   ABCDBADC   ABCDEFGCDEHABGFH

Gaussovo kódovaní je omezeno na střídání křížení nad a pod (+1, -1, +1, …).

S počtem křížení *n* roste délka řetězce *2n* .

Tuto nevýhodu odstranili H. Dowker a M. B. Thistlethwaite v r. 1983.

Dowker Thistlethwaitovo kódování



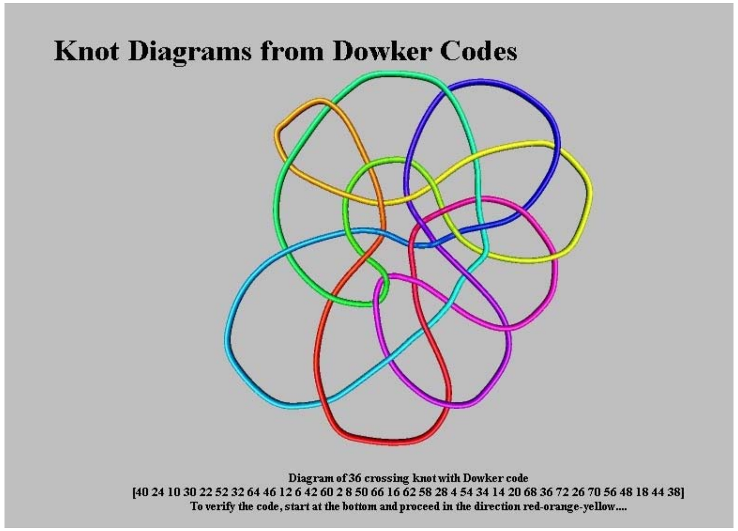
[4 6 2]   [6 8 2 4]   [12 8 10 -14 4 16 2 -6]

Křížení je značeno postupně v dohodnutém směru podél provazce *1, 2, 3, … 2n*.

Každé křížení je označeno dvěma údaji, sudým a lichým.

DT definovali <u>paritně reverzní mapování</u> *p(i)* pro *i = 1, 2, 3, …, n*. Pak *i* a *p(i)* označují tentýž bod *p(p(i)) = i*. Odtud *p(i) = p(1), p(2), p(3), …, p(2n –1)*.

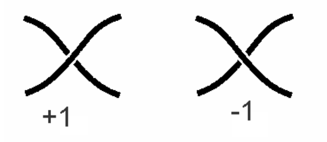
Příklad DT zápisu:



„Kalkul pro zaplétání“

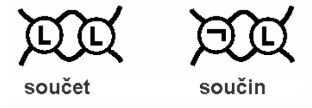
V roce 1970 John Conway zavádí pro tvorbu uzlů elementární prvky a definuje algebraické operace pro zaplétání.

Př. Základní elementy.

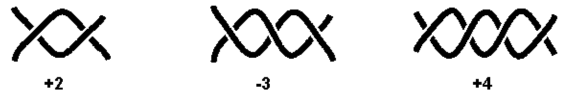


Základní algebraické operace.

(L značí element)

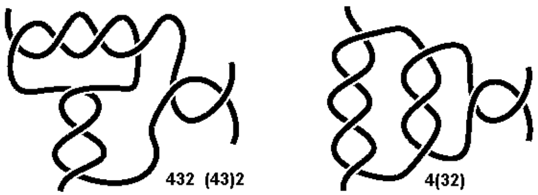


výsledky sčítání:



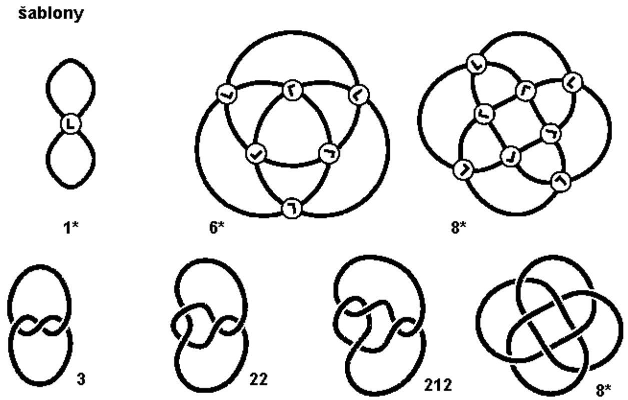
Př. elementy 3, 2 **výsledek násobení:**

součin je asociativní zleva:



abcd = (((ab)c)d

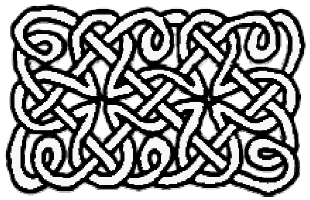
Pro splétání složitějších uzlů má Conway konstrukční struktury



Hledáme <u>vhodný zápis</u> pro „počítačovou konstrukci“ dekorativních uzlů.

vhodný = pokud možno, navazující na konstrukci mozaik

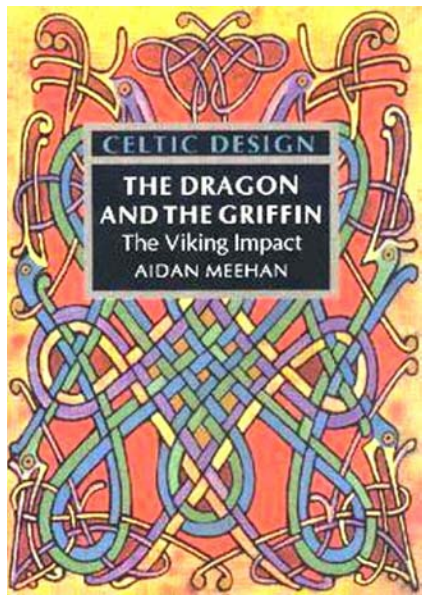
Keltové neznali teorii uzlů a přesto úspěšně uzlováním dekorovali již ve čtvrtém století př.n.l:

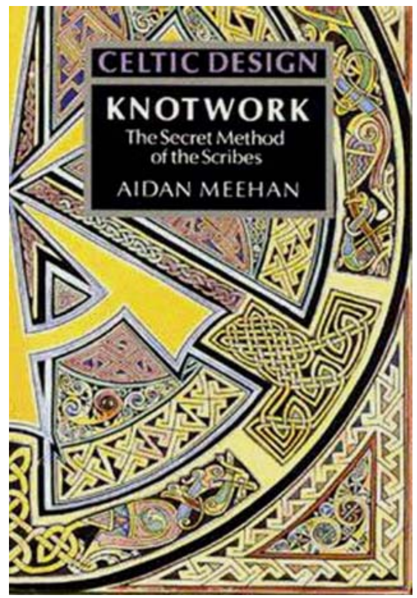


Keltské vzory 1:

Keltské vzory 2:

Ilustrace obálek inspirované keltskými vzory:



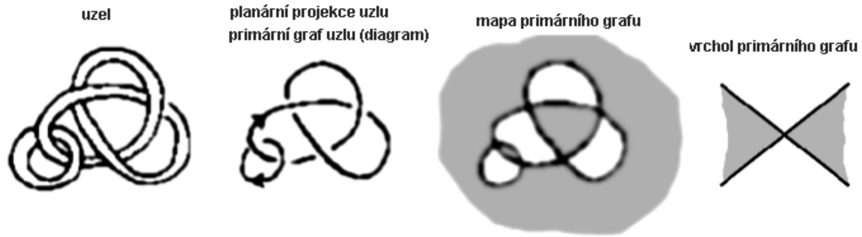


Keltské uzly a pletence.

Keltové - 4. stol. př.n. l., irští mniši - 6. stol. n. l., … Christian Mercat 1993-7.

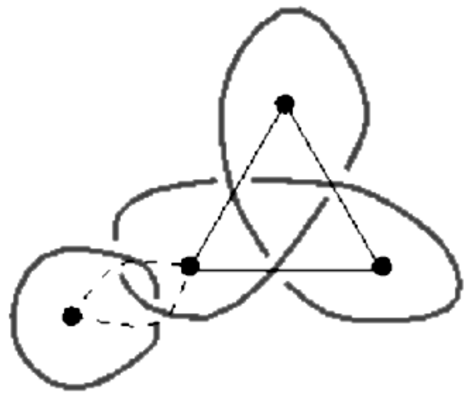
Mercatův (Abbottův) **algoritmus (1997) vychází z duálního grafu uzlu.**

<u>Primární planární graf uzlu</u> vznikne regulární projekcí uzlu.
Parceluje rovinu na oblasti a vytváří mapu grafu, kterou „šachovnicovitě“ vybarvíme tak, že parcela vně neomezená bude tmavá.



Položíme–li nové vrcholy grafu do světlých oblastí (ok, smyček),

dostaneme duální graf uzlu.



Ať hrany duálního grafu představují <u>stěny buněk</u>.

Definujme čtyři typy hran (stěn buněk):

***Hrana bude typu 1*, tedy kladná, když provazec přicházející zleva kříží shora.**

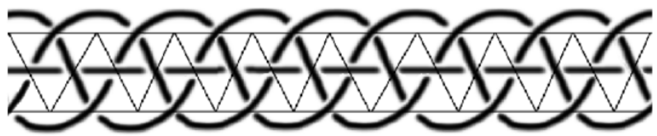
***Hrana bude typu 2*, tedy záporná, v ostatních případech.**

hrana typu 1
+

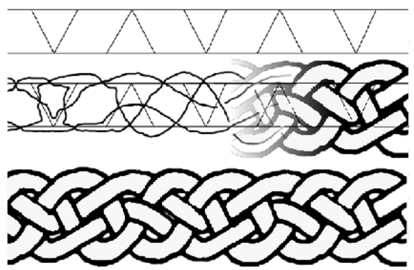
hrana typu 2
–

Hrany typu 1 a 2 tedy představují stěny s otvorem, kterým provazce procházejí a kde se kříží.
Z hlediska chování provazců jde o stejný typ stěny (stěna s otvorem).

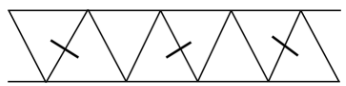
Př.
Trojúhelníková struktura grafu jako pásová šablona.



Zavedeme třetí typ hrany.

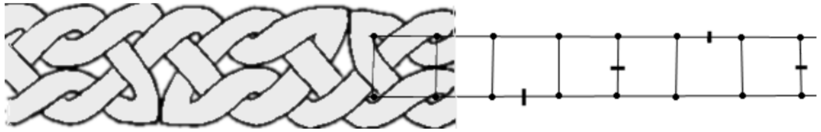


hrana typu 3
(vynechaná)



***Hrana typu 3* je vynechanou hranou (spojení dvou vrcholů v primárním grafu).**
V této stěně buňky se provazce míjejí.

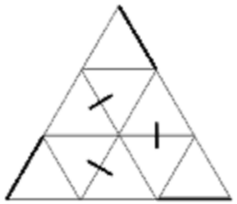
Př. Hrany typu 3 ve čtvercové struktuře grafu:

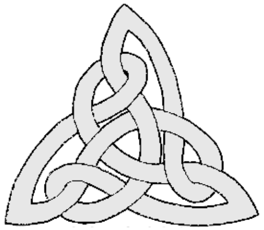


Pro volnější tvarování průběhu provazce zavedeme čtvrtý typ hrany:

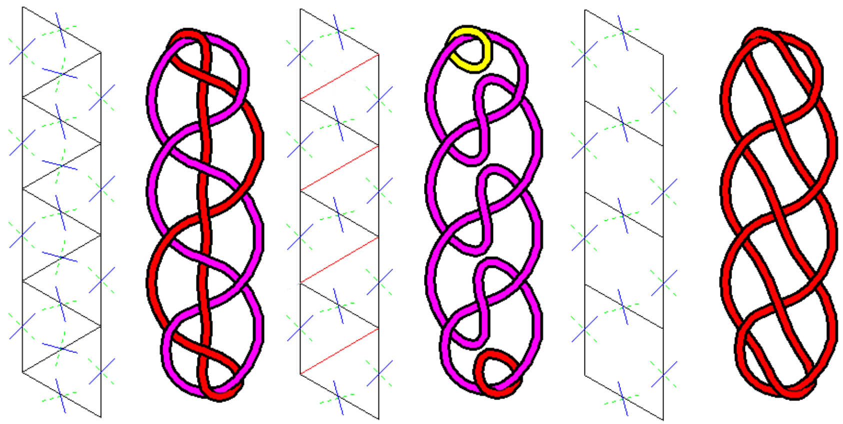
Hrana typu 4 **neobsahuje křížení, tj. představuje stěnu bez otvoru pro průchod provazce.**

hrana typu 4
(bez křížení)



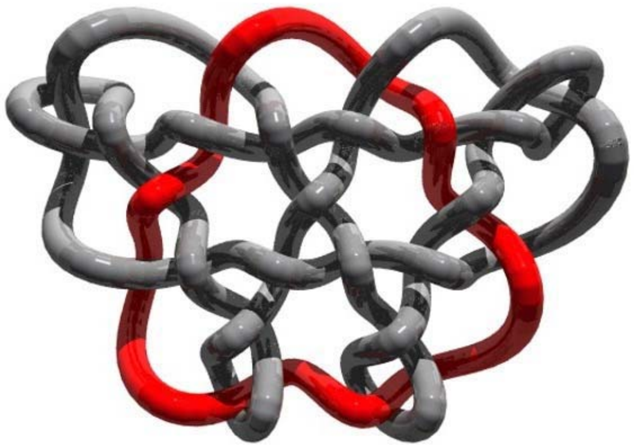


Př. Modifikace hran grafu

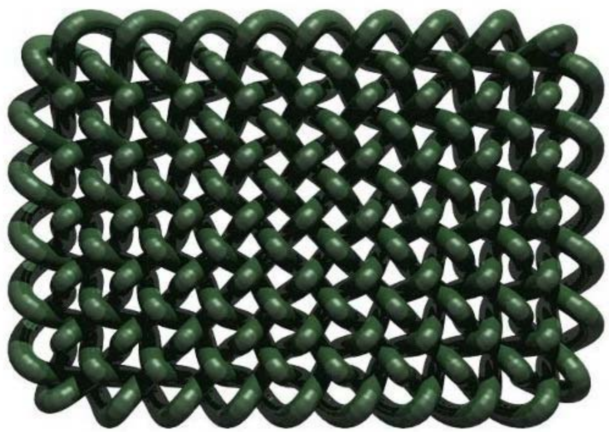


Př. Finální zobrazení uzlů ve 3D

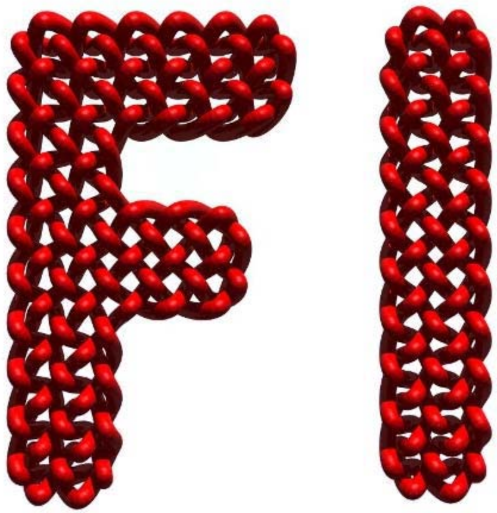
Trojúhelníková
mříž:



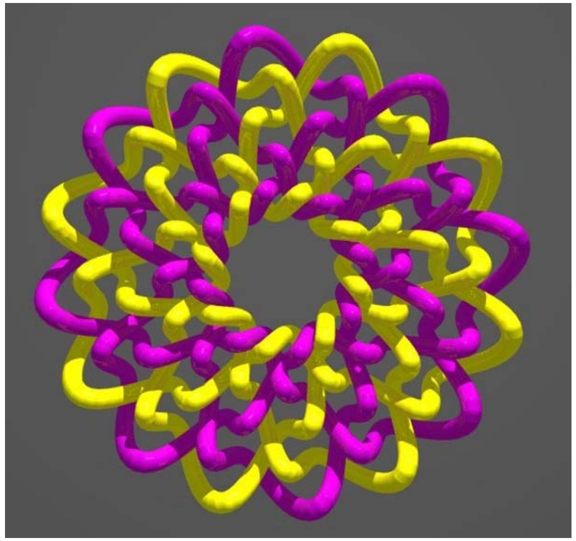
Čtyřúhelníková mříž varianta 1:



Čtyřúhelníková mříž - varianta 2:



Lichoběžníková rozeta jako mříž:



Složitější struktury vytvoříme skládáním jednodušších zapouzdřených uzlů.

Zapouzdřený motiv a jeho duální graf

motiv

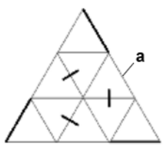
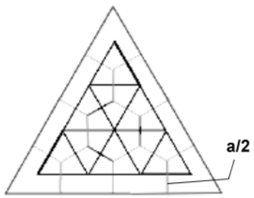
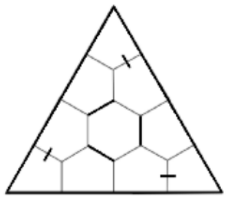


schéma zapouzdření

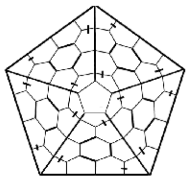


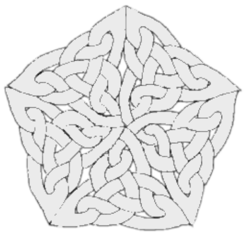
duální graf pro skládání



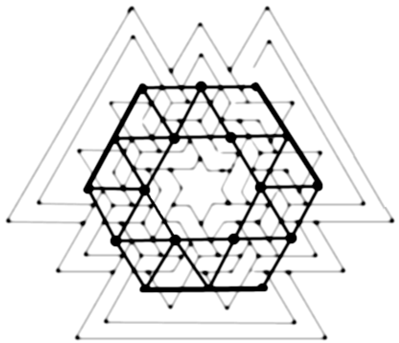
Hrany typu 3 přejdou v hrany typu 4 a naopak!

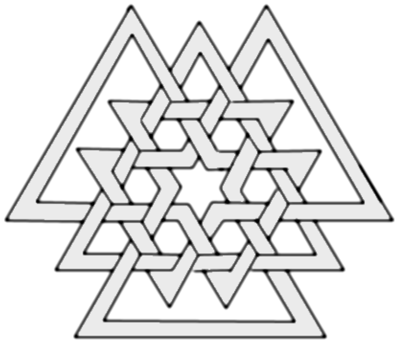
Příklad složení trojúhelníkových motivů:



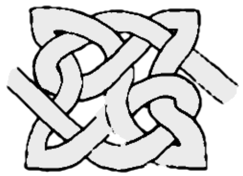


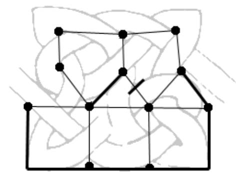
Technika neúplného zapouzdření skýtá další možnosti.



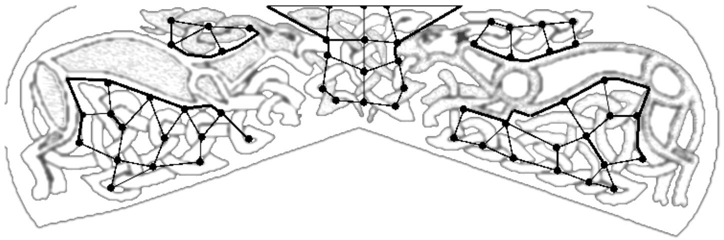


Př. Kombinace různých mřížek:





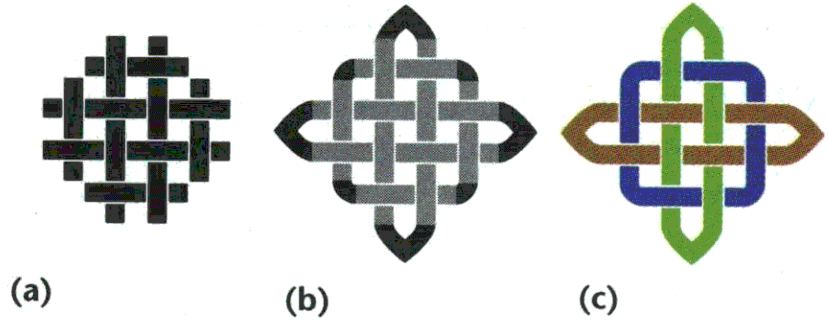
Fantazii se meze nekladou (Aidan Meehan)



Glassnerův algoritmus (Grid-oriented Knots)

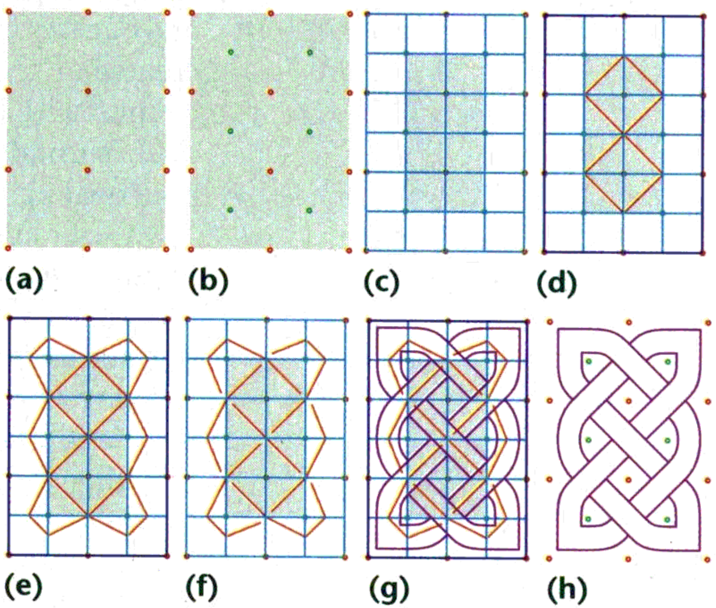
Irští mniši - 6. století, ilustrátor Georg Bain 1951, A. Glassner 1999.

Uzly jsou konstruovány v pravidelné čtvercové mřížce h,v a mají vnitřní a vnější část proplétání:



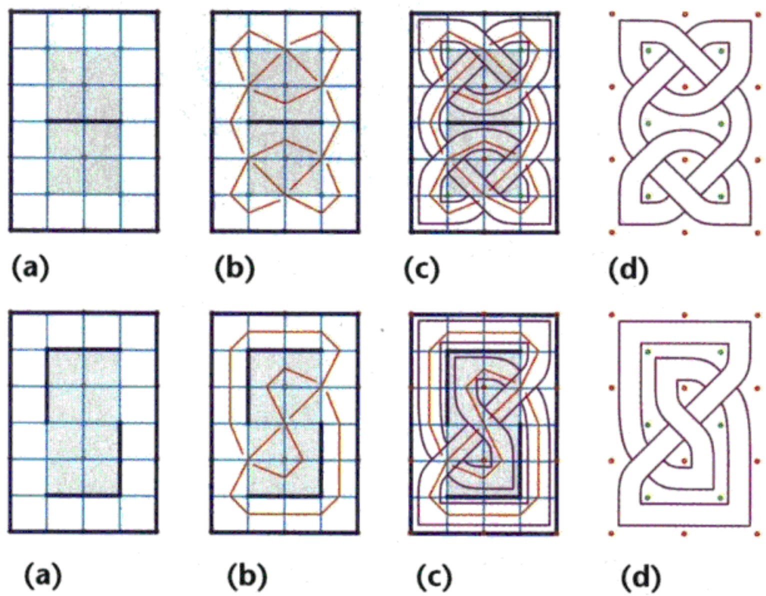
Jsou-li h a v nesoudělná čísla, je uzel tvořen jedním provazcem, mají-li společného dělitele, tvoří uzel několik provazců (uzel je spojka).
Uzel je definován prvním (startovním) křížením (+, -).

Algoritmus tří mřížek



Zavedení překážek

(viz dřívější neprůchozí stěny buněk)

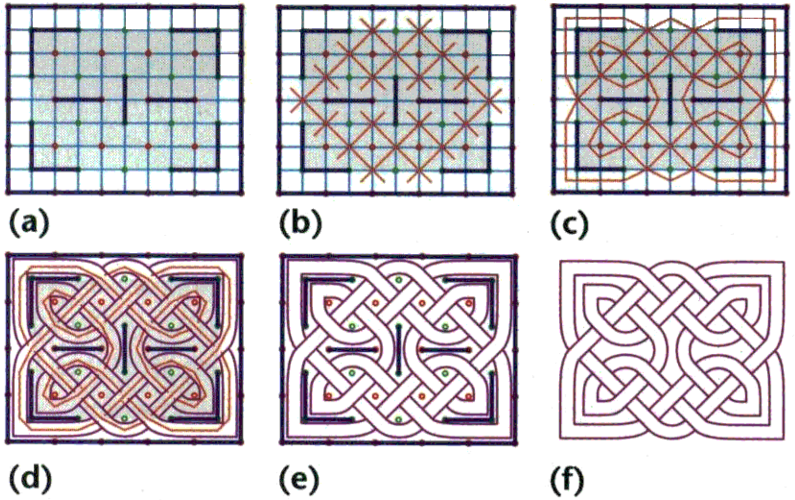


Umístění překážek má několik omezení:

Překážky se nesmějí protínat. Spojují horizontálně či vertikálně sousední body ve své mřížce.

Př.

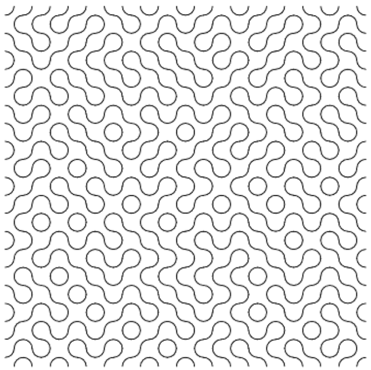
Uzel (*5,4*)



Jedna z kreací A. Glassnera

Hadovité uzly přes hadovité mozaiky

Náhodně otáčená **dlaždice:**



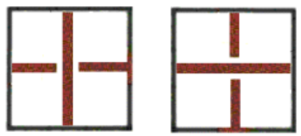
Sebastian Truchet - 1657 - 1729

Glassnerovy buňky X a T

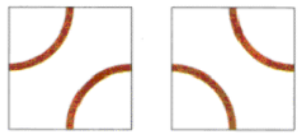
Zavedení buněk typu X (spojování protilehlých průchodů buněk, tj. křížení) a typu T (spojování průchodů přilehlých stěn) dovolí vytváření „hadů“.

T ⇒ Pater Sébastien Truchet

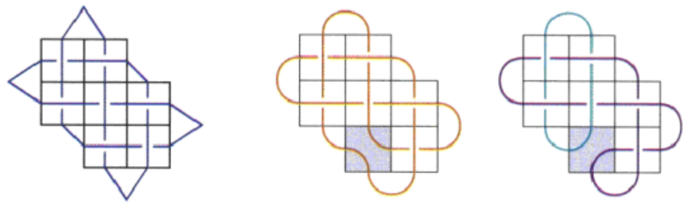
buňky X



buňky T



Záměna X - T



Orientované (směrované) skelety.

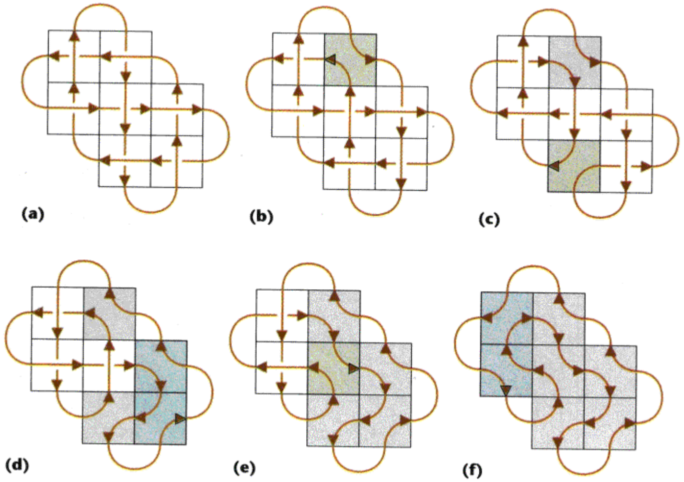
Glassner hady přirovnává k hadicím s proudící vodou. Náhrada X za T mění směr toku, který musí zůstat v uzlu jednosměrný a nepřerušený.

Př.
Konstrukce „hada“.

zelená: měněná buňka

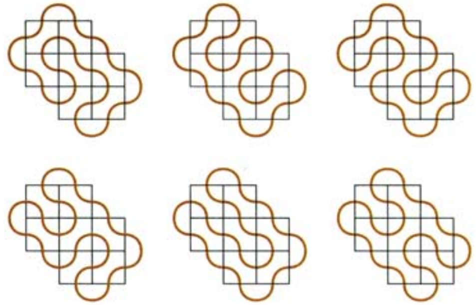
modrá: vynucená konfigurace

šedá: změněná buňka

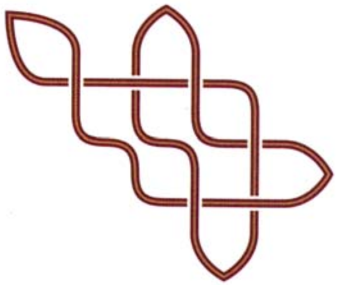


Výsledný tvar je definován startovací buňkou:

výsledky různých startů



Př. Keltský uzel
(„neúplný had“)



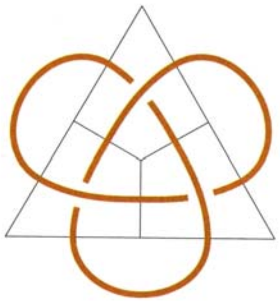
Glassner vytvořil pomocné programy – KnotAssistant pro strojový návrh a ruční dokončení uzlů.

Vytvořil i mozaikový systém se zámkovými dlaždicemi, které jsou autorsky chráněné (viz studijní literaturu). Systém je modifikací uvedené X-T výměny buněk.

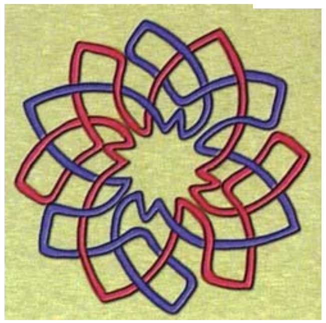
Síť nemusí být čtvercová, stačí, má-li buňka čtyři stěny.

síť 1

síť 2

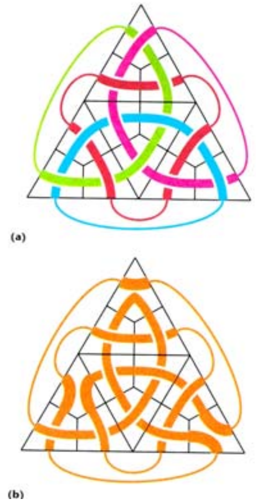


Př.
Uzel konstruovaný kruhové obálce.

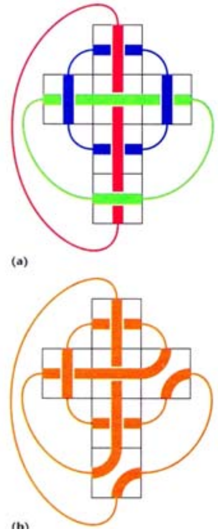


Aplikací sítě buněk na rozvinutý plášť vhodného tělesa vytvoříme efektní 3D uzel:

čtyřstěn

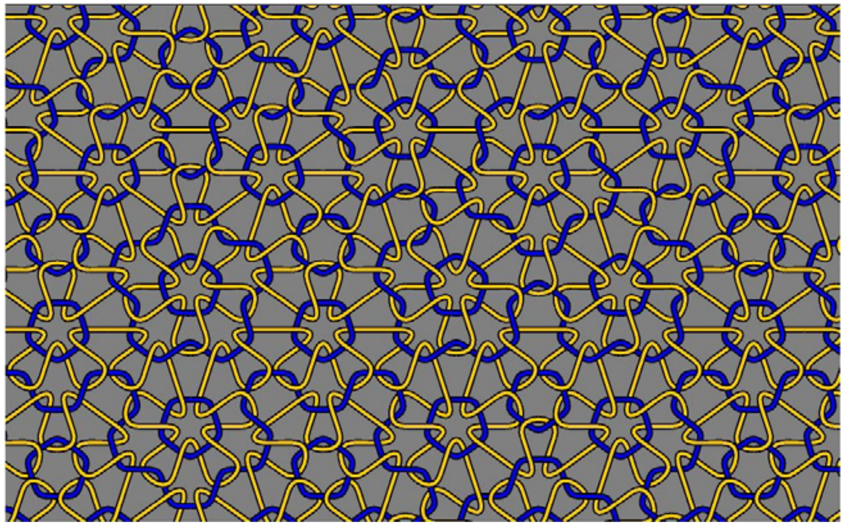


krychle

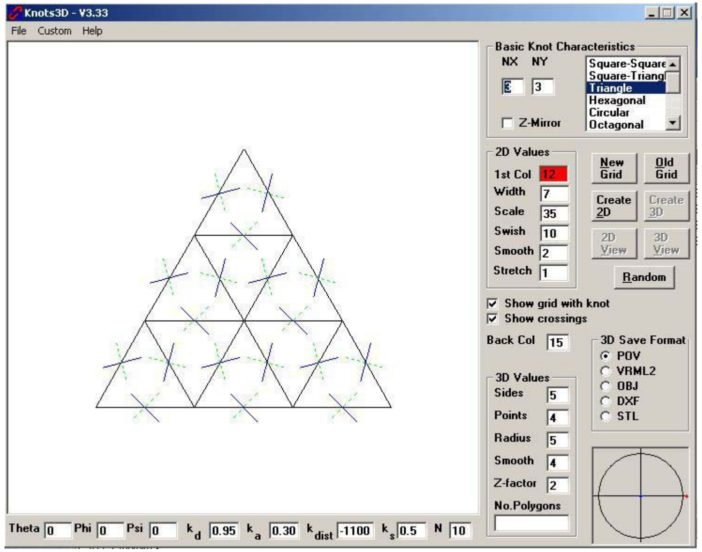


Samostatnou skupinu tvoří např. uzly na toroidu a další.

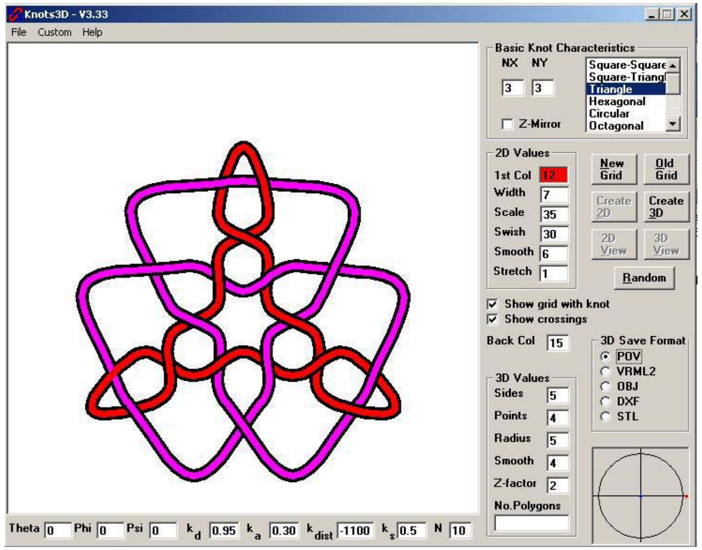
Uzel jako mozaika (a naopak)! Cíle dosaženo?



Abbottův program Knots3D (vstupní graf uzlu)



Abbottův program Knots3D (výstup 2D)



Abbottův program Knots3D (výstup 3D)