BIOART
Geometrie živých přírodních tvarů

<u>Tvar objektu</u> známe, známe-li jeho rozměr ve všech směrech.

<u>Velikost</u>, jako základní charakteristika živého je z geometrického hlediska nepodstatná (invariantnost k měřítku), z fyzikálního hlediska je velikost zásadní.

<u>Objem</u> roste s třetí mocninou velikosti, průřez kostí roste s druhou mocninou velikosti a určuje mechanickou únosnost živého.

<u>Povrch</u> respektuje energetické poměry. Tepelné ztráty jsou úměrné velikosti povrchu a jim odpovídá spotřeba potravy, stavebního materiálu apod.

<u>Poměr povrch / objem</u> ovlivňuje tvar povrchu a jeho prostorové uspořádání.

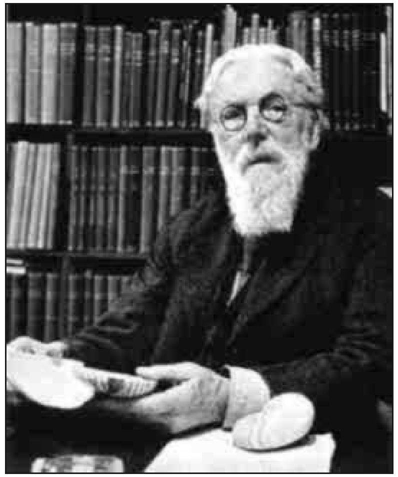
Tvar živého je i přes <u>symetrie</u> zpravidla nerovnomocný, atd.

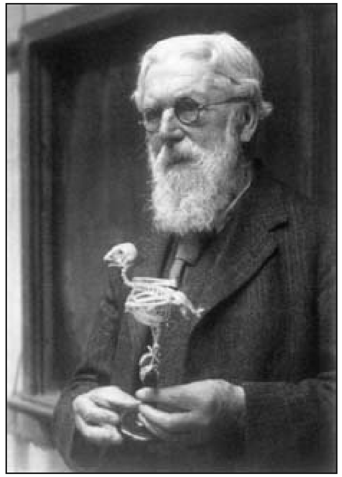
Poznámka: **Geometrii živého objektu umíme někdy modelovat (generovat), pokud umíme matematicky zapsat zákony jeho vzniku, resp. vývoje.**

MOC TOHO NEUMÍME!!!

Matematika se geometrii živého příliš nevěnovala.

Skot D’Arcy Thompson: On Growth and Form - Kniha vyšla poprvé r. 1917.





D’Arcy Thompson

(1860 – 1948)

je zakladatelem

<u>Biomatematiky</u>.

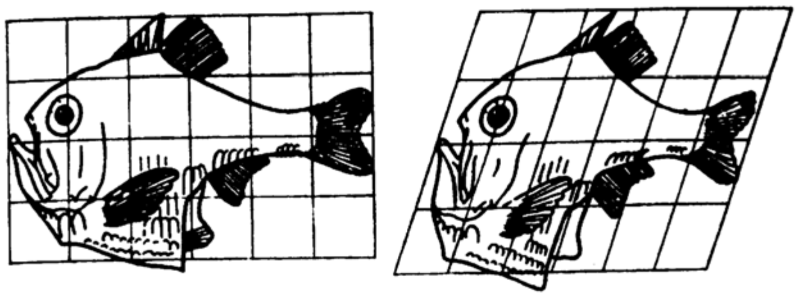
Poznámka: **Kniha vyšla také r.1968 v nakladatelství Cambridge University Press.**

D’Arcy Thompson zjistil, že rozmanitost tvarů je možné redukovat použitím transformací v různých geometriích.

Př. Afinní geometrie:

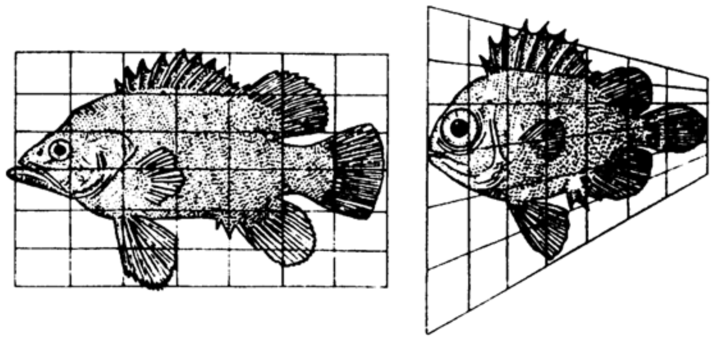
grupa lineárních zobrazení

$$u = a_{10} + a_{11}x + a_{12}y$$
$$v = a_{20} + a_{21}x + a_{22}y$$

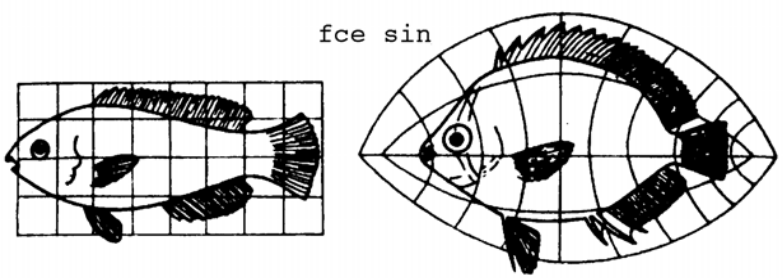


Projektivní geometrie:

$$u = (a_{10} + a_{11}x + a_{12}y)/(a_{00} + a_{01}x + a_{02}y)$$
$$v = (a_{20} + a_{21}x + a_{22}y)/(a_{00} + a_{01}x + a_{02}y)$$

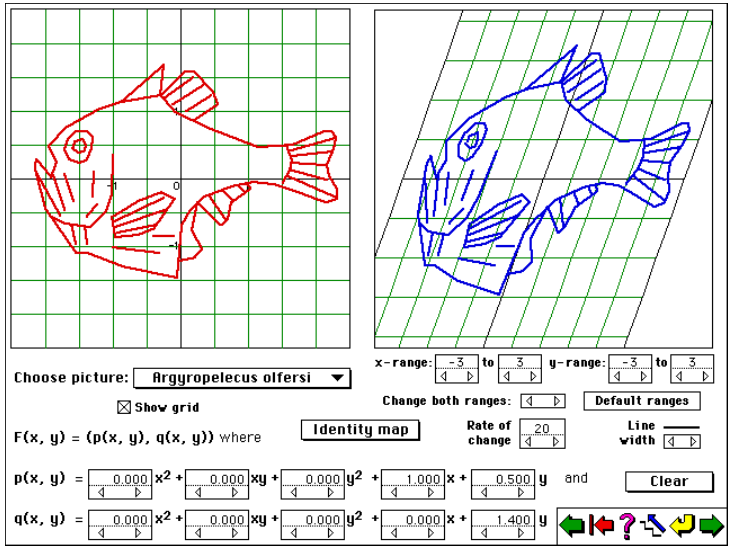


Transcendentní geometrie:



…
a řada dalších geometrií.

Na počest prof. Thompsona jeho pokračovatelé na School of Mathematics and statistics University of St Andrews ve Skotsku vytvořili interakční editor:

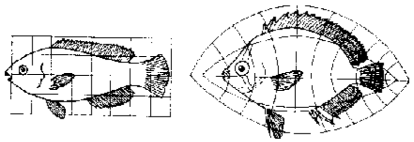


Tvarovací funkce
F(x,y)
je kvadratická mapa s deseti volnými parametry.

Proměnné *p* a *q* jsou polynomy 2st.

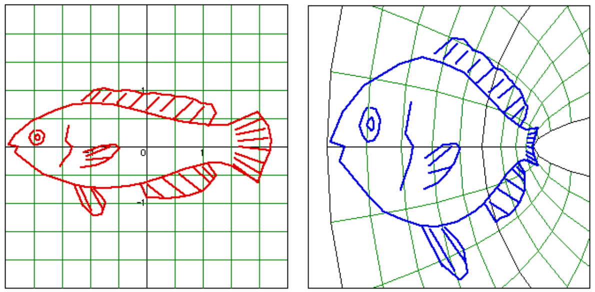
Př. Transformace

Thompson:



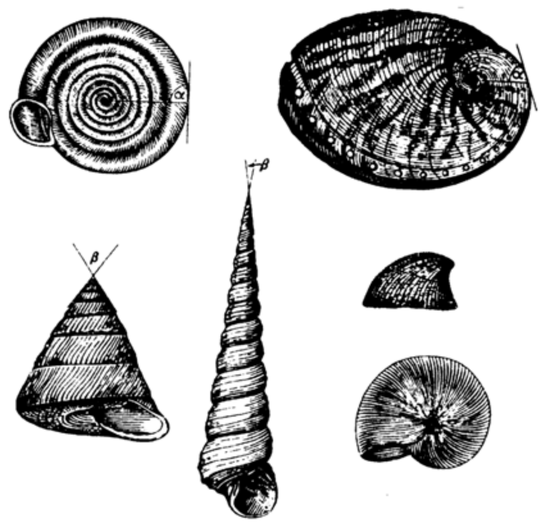
Scarus sp. *Pomacanthus.*

Program
kvadratická mapa:



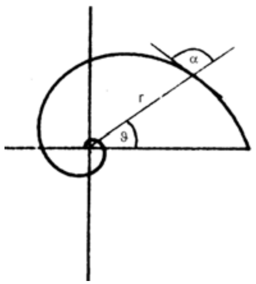
ULITY, LASTURY, KLY, ROHY apod.

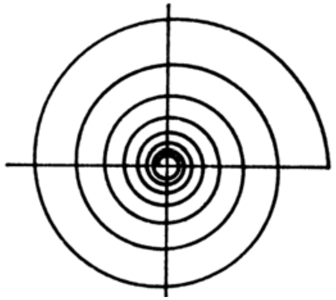
Ilustrace z Thompsonovy Knihy:



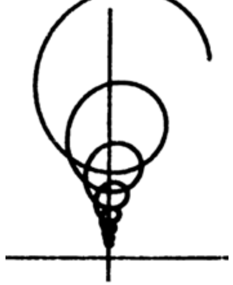
Ulita je záznamem historie organismu.

Je soběpodobná a zachovává „stejný tvar“ - tuto vlastnost má logaritmická spirála a její 3D varianty.





$\theta = tg(\theta)ln(r)$



Je to trajektorie lineárního dynamického systému.

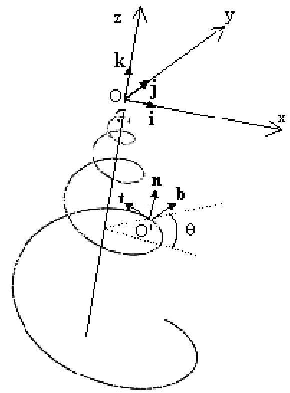
Rovnice 3D spirály v cylindrických souřadnicích θ, r, z **- šnekovnice**

$d\theta/dt = 1$

$dr/dt = ra$ $\qquad a = cotg(\alpha)$

$dz/dt = bz$ $\qquad \alpha, b$ **jsou parametry** $\qquad \theta_0, r_0, z_0$ **jsou počáteční podmínky**

G. Lucca modeluje ulity tažením řezové (generující) křivky po tvořící (strukturální) křivce



Zvolíme dva ortogonální systémy souřadnic *x, y, z* **s počátkem** *O* **a jednotkovými vektory** ***i, j, k*** **a „tečný“ s jednotkovými vektory** ***t, n, b.***

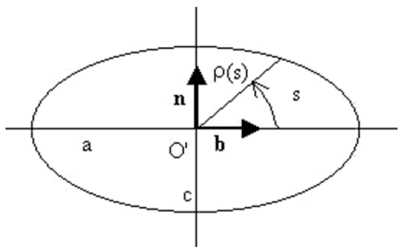
$$\mathbf{t} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}_s}{d\vartheta}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}_s}{d\vartheta}\right|} \qquad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{t}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}_s}{d\vartheta^2}}{\left|\mathbf{t}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}_s}{d\vartheta^2}\right|} \qquad \mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t}$$

Obě křivky zapíšeme v parametrickém tvaru.

Strukturální křivku tvoří logaritmická spirála v parametrické formě s parametrem θ **(azimut),** $\mathbf{r_s}$ **je průvodič.**

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s(\vartheta) = \begin{cases} x_s = x_s(\vartheta) \\ y_s = y_s(\vartheta) \\ z_s = z_s(\vartheta) \end{cases}$$

Generující křivkou je oblouk elipsy s parametrem *s* **a průvodičem** ρ **a poloosami** *a* **a** *c***.**



$$\begin{cases} x'_g = \rho(s)\cos(s) \\ y'_g = 0 \\ z'_g = \rho(s)sin(s) \end{cases}$$

kde

$$\rho(s) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2(s)}{a^2} + \dfrac{sin^2(s)}{c^2}}}$$

Přetransformujeme vektory ***b*** **do** ***i***, ***t*** **do** ***j*** **a** ***n*** **do** ***k***.

$$\begin{cases} x_g(s,\vartheta) = \rho(s)\left(b_x(\vartheta)\mathbf{cos}(s) + n_x(\vartheta)sin(s)\right) \\ y_g(s,\vartheta) = \rho(s)\left(b_y(\vartheta)\mathbf{cos}(s) + n_y(\vartheta)sin(s)\right) \\ z_g(s,\vartheta) = \rho(s)\left(b_z(\vartheta)\mathbf{cos}(s) + n_z(\vartheta)sin(s)\right) \end{cases}$$

Body na povrchu ulity pak budou funkcí obou parametrů:

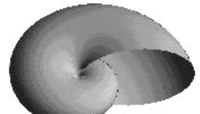
$$\begin{cases} X(s,\vartheta) = e^{w\vartheta}x_g(s,\vartheta) + x_s(\vartheta) \\ Y(s,\vartheta) = e^{w\vartheta}y_g(s,\vartheta) + y_s(\vartheta) \\ Z(s,\vartheta) = e^{w\vartheta}z_g(s,\vartheta) + z_s(\vartheta) \end{cases}$$

Nerovnosti povrchu (vruby apod.) vytvoříme perturbací průvodiče elipsy.

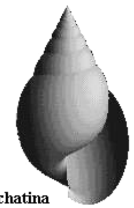
$$\rho(s) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2(s)}{a^2} + \dfrac{sin^2(s)}{c^2}}} + \psi(s,\vartheta)$$

Ψ **bude jednoduchá zvolená funkce.**

Výsledky: Př. 1



Nautilus

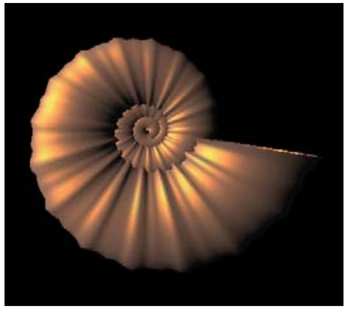


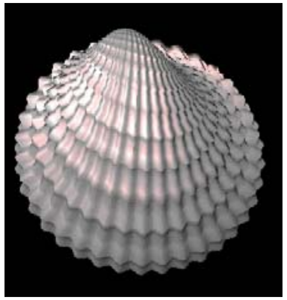
Achatina

Diodora

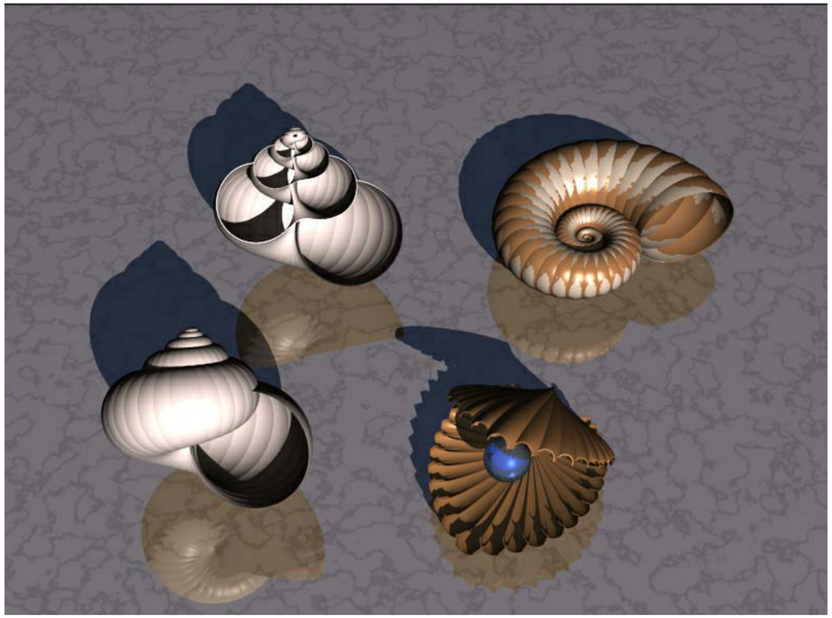
Př.2

OYVINDHA:



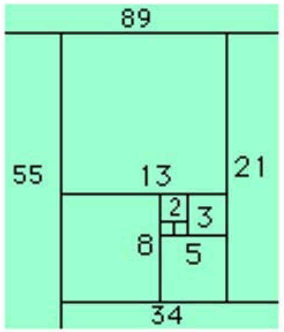



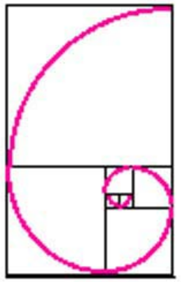
Př. 3



Logaritmickou spirálu můžeme konstruovat i pomocí Fibonacciho řady, aplikované na sekvenci přikládaných čtverců.

Př. Podle R. Knotta:





Fylotaxie (rozmístění šupin na šiškách, kůře palem apod.)

Útvary jsou rozmístěny na tzv. <u>genetické spirále.</u>

Souřadnice n-tého útvaru jsou

$\Phi_n = n\alpha,\ z_n = nc,\ r_n = konst.$

Rozvineme-li válcovou plochu do roviny,

jsou nové souřadnice n-tého útvaru

$x_n = n\beta - [n\beta],\ \ z_n = nc,\ \beta = \alpha / 2\pi$

Dostaneme systémy spirál.

Závorky značí přiřazení nejbližšího celého čísla, takže $-1/2 < x_n < \frac{1}{2}$.

Systémy spirál:

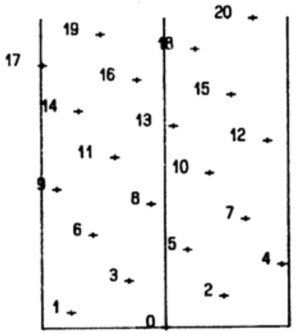
0, 2, 4, 6, 8, 10 12, …

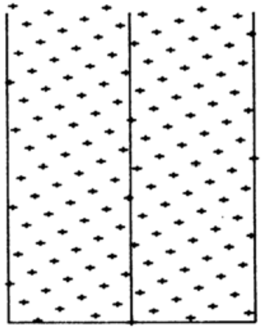
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, …

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, …

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, …



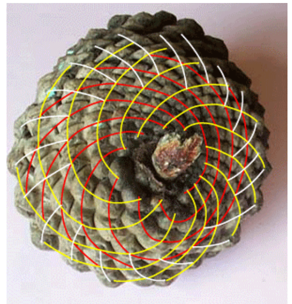


Nejzřetelnější jsou dva systémy spirál v opačných směrech, které jsou v 95% po sobě jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

Úhel α je tzv. zlatý úhel, který dostaneme rozdělením plného úhlu v poměru zlatého řezu.
Zlatý úhel α = 222,5° a jeho doplněk β = 137,5°.

Př. 1. Šišky borovice (Suzan Goldstine):



Stejně je možné najít Fibonacciho řadu ve spirálách semeníků některých rostlin.

Kvítky slunečnice

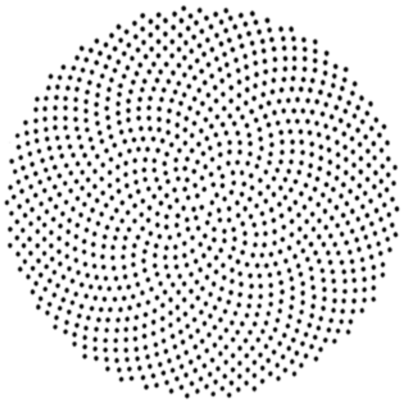
H. Vogel v roce 1979 sestrojil model slunečnice, založený na cyklotronové spirále.

r(Φ) = c√Φ

polární souřadnice n-tého kvítku jsou
$r_n = c\sqrt{n}$, $\Phi_n = n\alpha$

Plošná hustota je nezávislá na poloměru R.

Základní spirálu neuvidíme, vidíme však systém F_n parametrických spirál.



$\Phi = 2\pi\beta(tF_n + k) - 2\pi tF_{n-1}$, $r = c\sqrt{(tF_n + k)}$

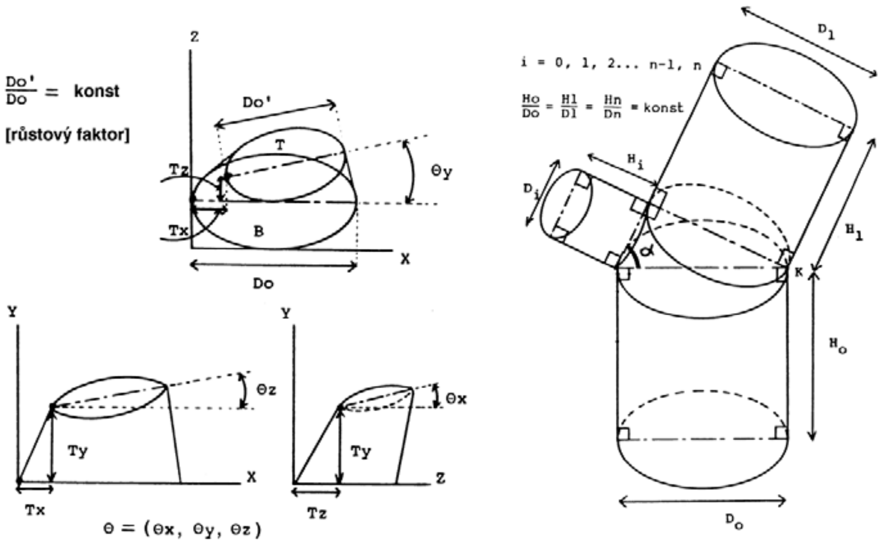
$k = 0, 1, 2, \ldots, F_{n-1}$ **je číslo spirály**

$t > -k/F_n$

Poznámka: **Vzpomeňte na model slunečnice jako L-systém.**

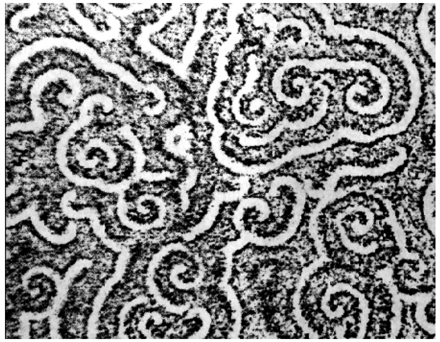
Př. Prezentace matematického studia filotaxie

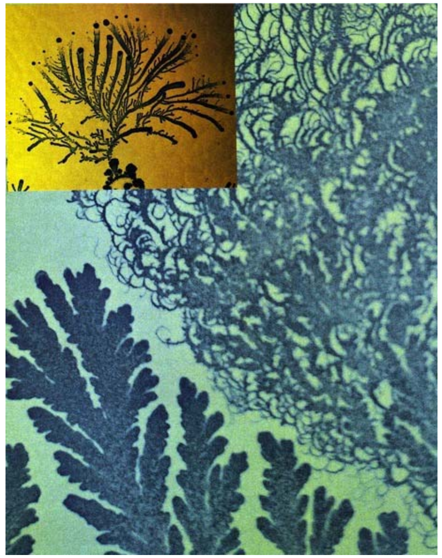
Přírůstky a úponky větvících se živých objektů mají také své zákonitosti:



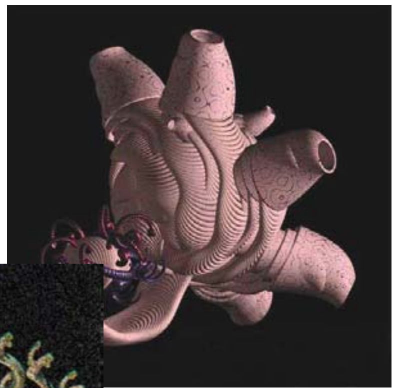
Někdy při tvorbě tvarů a textur stačí inspirace základními charakteristikami živého.

Př. 1





Př. 2 (Organic Art)



Př. 3 (Kreace Bernta Lintermanna)