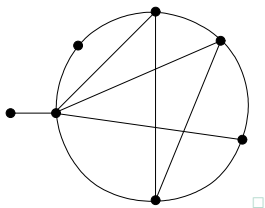


# 1 Pojem grafu

*Grafy* jsou jedním z nejdůležitějších pojmů diskrétní matematiky. Neformálně, graf se skládá z

- *vrcholů* neboli také uzlů (“puntíků”)
- a *hran* (“spojnic”) mezi dvojicemi vrcholů.

(Pozor, **nepleťme si graf** s grafem funkce!)



Takový graf může vyjadřovat souvislosti mezi objekty, návaznosti, spojení nebo toky, atd. Svě důležité místo v informatice si grafy získaly dobře vyváženou kombinací svých vlastností – snadným **názorným nakreslením** a zároveň jednoduchou **zpracovatelností na počítačích**.

## Stručný přehled lekce

- zavedení a pochopení grafů, jejich základní pojmy,
- příklady běžných tříd grafů,
- stupně vrcholů v grafech,
- podgrafy, isomorfismus grafů a jeho poznání.

## 1.1 Definice grafu

**Definice 1.1. Graf** (rozšířeně *obyčejný* či *jednoduchý neorientovaný* graf) je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je množina *vrcholů* a  $E$  je množina *hran* – množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů.

**Značení:** Hranu mezi vrcholy  $u$  a  $v$  píšeme jako  $\{u, v\}$ , nebo zkráceně  $uv$ .

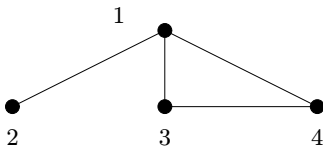
Vrcholy spojené hranou jsou *sousední*.

Na množinu vrcholů grafu  $G$  odkazujeme jako na  $V(G)$ , na množinu hran  $E(G)$ . □

**Fakt:** Na graf se lze dívat také jako na symetrickou ireflexivní relaci, kde hrany tvoří právě dvojice prvků z této relace. □

**Poznámka:** Grafy se často zadávají přímo názorným obrázkem, jinak je lze také zadat výčtem vrcholů a výčtem hran. Například:

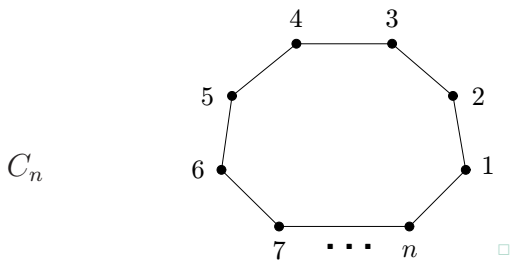
$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}$$



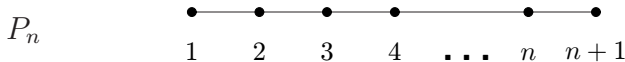
## Běžné typy grafů

Pro snadnější vyjadřování je zvykem některé běžné typy grafů nazývat popisnými jmény.

**Kružnice délky  $n$**  má  $n \geq 3$  vrcholů spojených do jednoho cyklu  $n$  hranami:

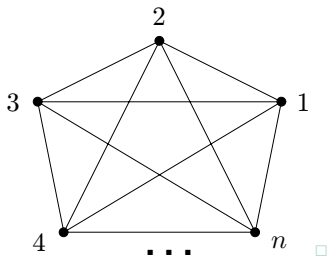


**Cesta délky  $n$**  má  $n + 1$  vrcholů spojených za sebou  $n$  hranami:



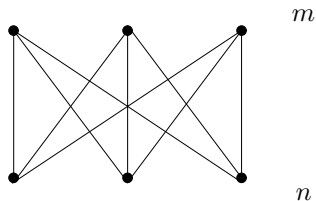
**Úplný graf** na  $n \geq 1$  vrcholech má  $n$  vrcholů, všechny navzájem pospojované (tj. celkem  $\binom{n}{2}$  hran):

$K_n$



**Úplný bipartitní graf** na  $m \geq 1$  a  $n \geq 1$  vrcholech má  $m + n$  vrcholů ve dvou skupinách (partitách), přičemž hranami jsou pospojované všechny  $m \cdot n$  dvojice z různých skupin:

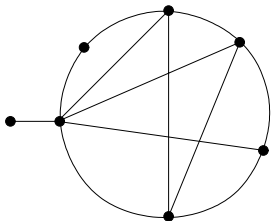
$K_{m,n}$



## 1.2 Stupně vrcholů v grafu

**Definice 1.2.** **Stupněm vrcholu**  $v$  v grafu  $G$  rozumíme počet hran vycházejících z  $v$ . Stupeň  $v$  v grafu  $G$  značíme  $d_G(v)$ .

Slovo “vycházející” zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.



Například tento zakreslený graf má stupně vrcholů 1, 2, 3, 4, 4, 4, 6. □

**Značení:** *Nejvyšší* stupeň v grafu  $G$  značíme  $\Delta(G)$  a *nejnižší*  $\delta(G)$ .

**Věta 1.3.** *Součet stupňů v grafu je vždy sudý, roven dvojnásobku počtu hran.* □

**Důkaz.** Při sčítání stupňů vrcholů v grafu započítáme každou hranu dvakrát – jednou za každý její konec. Proto výsledek vyjde sudý. □

## Vlastnosti stupňů

Jelikož v obyčejném grafu zvláště nerozlišujeme mezi jednotlivými vrcholy, nemáme dáno žádné pořadí, ve kterém bychom stupně vrcholů měli psát. Proto si stupně obvykle seřazujeme podle velikosti.

\* Zajímavou otázkou je, které posloupnosti stupňů odpovídají vrcholům skutečných grafů?

(Například posloupnost stupňů 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 nemůže nastat nikdy.) □

**Věta 1.4.** *Nechť  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  je posloupnost přirozených čísel. Pak existuje graf s  $n$  vrcholy stupňů*

$$d_1, d_2, \dots, d_n$$

*právě tehdy, když existuje graf s  $n - 1$  vrcholy stupňů*

$$d_1, d_2, \dots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-2} - 1, d_{n-1} - 1.$$

K použití Věty 1.4: Mírně nepřehledný formální zápis věty znamená, že ze seřazené posloupnosti odebereme poslední (největší) stupeň  $d_n$  a od tolika  $d_n$  bezprostředně předchozích stupňů odečteme jedničky. Zbýlé stupně na začátku posloupnosti se nezmění.

(Nezapomeňme, že posloupnost je třeba znovu seřadit dle velikosti.)

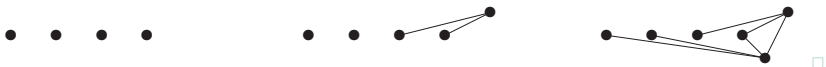
**Příklad 1.5.** Existuje graf se stupni vrcholů:

$(1, 1, 1, 2, 3, 4)$  ?

Dle Věty 1.4 upravíme na  $(1, 0, 0, 1, 2)$ , uspořádáme ji  $(0, 0, 1, 1, 2)$ , pak znovu  $(0, 0, 0, 0)$  a takový graf už jasně existuje.

Na druhou stranu, jak takový graf sestojíme? □

(Obvykle není jediný, ale nás zajímá aspoň jeden z nich.) Prostě obrátíme předchozí postup, začneme z grafu se 4 vrcholy bez hran, přidáme vrchol stupně 2 spojený se dvěma z nich a další vrchol stupně 4 takto:



$(1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7)$  ? □

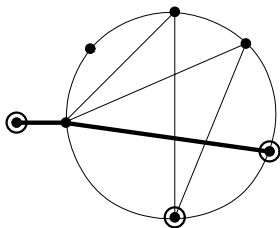
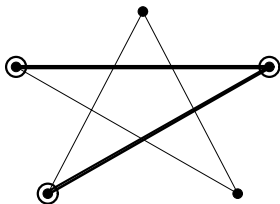
Podobně upravíme na  $(1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 5)$  a uspořádáme ji  $(0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5)$ , pak znovu  $(0, 0, -1, 0, 0, 1, 2)$ , ale to už přece nelze – stupně nejsou záporné. Proto takový graf neexistuje. □

## 1.3 Podgrafy a Isomorfismus

**Definice:** *Podgrafem* grafu  $G$  rozumíme libovolný graf  $H$  na podmnožině vrcholů  $V(H) \subseteq V(G)$ , který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu  $G$  majících oba vrcholy ve  $V(H)$ .

Píšeme  $H \subseteq G$ , tj. stejně jako množinová inkluze (ale význam je trochu jiný).  $\square$

Na následujícím obrázku vidíme, co je (vlevo) a co není (vpravo) podgraf. (Zvýrazněny jsou vybrané podmnožiny vrcholů a hran.)



**Definice:** *Indukovaným podgrafem* je podgraf  $H \subseteq G$  takový, který obsahuje **všechny hrany** grafu  $G$  mezi dvojicemi vrcholů z  $V(H)$ .



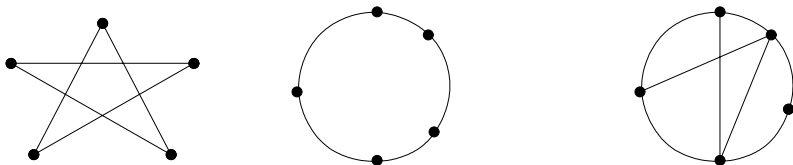
**Definice 1.6. Isomorfismus** grafů  $G$  a  $H$

je bijektivní (**vzájemně jednoznačné**) zobrazení  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , pro které platí, že každá dvojice vrcholů  $u, v \in V(G)$  je spojena hranou v  $G$  právě tehdy, když je dvojice  $f(u), f(v)$  spojena hranou v  $H$ .

Grafy  $G$  a  $H$  jsou **isomorfní** pokud mezi nimi existuje isomorfismus.

Píšeme  $G \simeq H$ .  $\square$

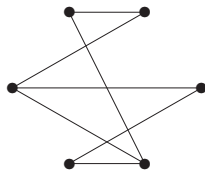
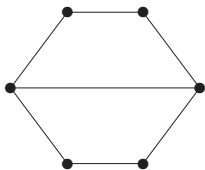
**Fakt:** Isomorfní grafy mají stejný počet vrcholů ( $i$  hran).



Z nakreslených tří grafů jsou první dva isomorfní – jsou to jen různá nakreslení “téhož” grafu, kružnice délky 5. (Určitě snadno najdete isomorfismus mezi nimi. Pro jednoduchost isomorfismus zakreslete do obrázku tak, že vrcholy prvního očísľujete čísly 1 až 5 a vrcholy druhého stejnými čísly v pořadí odpovídajícím jeho bijekci.) Třetí graf jim isomorfní není, neboť, například, má vrcholy jiných stupňů.  $\square$

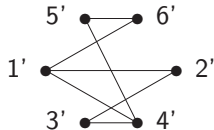
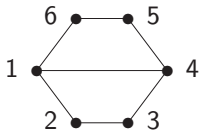
**Fakt:** Pokud je bijekce  $f$  isomorfismem, musí zobrazovat na sebe vrcholy stejných stupňů, tj.  $d_G(v) = d_H(f(v))$ . Naopak to však nestačí!

### Příklad 1.7. Jsou následující dva grafy isomorfní?



Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají **stejný počet vrcholů a hran**. □ Mají. Pak se podíváme na stupně vrcholů a zjistíme, že oba mají **stejnou posloupnost stupňů** 2, 2, 2, 2, 3, 3. □ Takže ani takto jsme mezi nimi nerozlišili a mohou (nemusejí!) být isomorfní. Dále tedy nezbyvá, než zkoušet **všechny přípustné možnosti** zobrazení isomorfismu z levého grafu do pravého. □

Na levém grafu si pro ulehčení všimněme, že oba vrcholy stupně tři jsou si symetrické, proto si bez újmy na obecnosti můžeme vybrat, že vrchol označený 1 se zobrazí na 1'. Druhý vrchol stupně tři, označený 4, se musí zobrazit na analogický vrchol druhého grafu 4'. A zbytek již plyne snadno:



□

**Věta 1.8.** Relace “být isomorfní”  $\simeq$  na třídě všech grafů je ekvivalencí.  $\square$

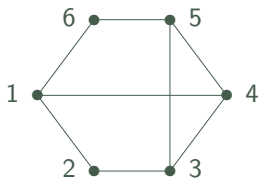
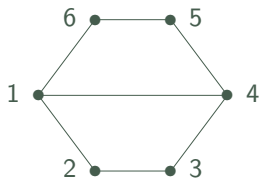
**Důkaz.** Relace  $\simeq$  je reflexivní, protože graf je isomorfní sám sobě identickým zobrazením. Relace je také symetrická, neboť bijektivní zobrazení lze jednoznačně “obrátit”. Transitivnost  $\simeq$  se snadno dokáže skládáním zobrazení–isomorfismů.  $\square$

Důsledkem je, že všechny grafy se rozpadnou na *třídy isomorfismu*. V praxi pak, pokud mluvíme o *grafu*, myslíme tím obvykle jeho *celou třídu isomorfismu*, tj. nezáleží nám na konkrétní prezentaci grafu.

## Další grafové pojmy

**Značení:** Mějme libovolný graf  $G$ .

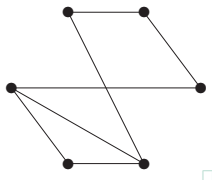
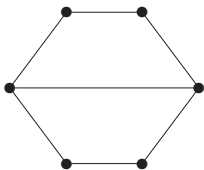
- Podgrafu  $H \subseteq G$ , který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v  $G$* .
- Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3.  $\square$
- Podgrafu  $H \subseteq G$ , který je isomorfní nějaké cestě, říkáme *cesta v  $G$* .  $\square$
- Podgrafu  $H \subseteq G$ , který je isomorfní nějakému úplnému grafu, říkáme *klika v  $G$* .
- Podmnožině vrcholů  $X \subseteq V(G)$ , mezi kterými nevedou v  $G$  vůbec žádné hrany, říkáme *nezávislá množina  $X$  v  $G$* .  $\square$
- Indukovanému podgrafu  $H \subseteq G$ , který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *indukovaná kružnice v  $G$* .



První z ukázaných grafů například neobsahuje žádný trojúhelník, ale obsahuje kružnici délky 4, dokonce indukovanou. Druhý graf trojúhelník obsahuje a kružnici délky 4 taktéž. První graf obsahuje cestu délky 4 na vrcholech 1, 2, 3, 4, 5, ale ta není indukovaná. Indukovaná cesta délky 4 v něm je třeba 2, 3, 4, 5, 6. Druhý graf tyto cesty také obsahuje, ale naopak žádná z nich není indukovaná.

První graf má největší kliku velikosti 2 – jedinou hranu, kdežto druhý graf má větší kliku na vrcholech 3, 4, 5. Největší nezávislá množina u obou grafů má 3 vrcholy 2, 4, 6.

### Příklad 1.9. Jsou následující dva grafy isomorfní?



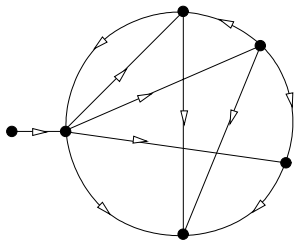
Postupovat budeme jako v Příkladě 1.7, nejprve ověříme, že oba grafy mají stejně mnoho vrcholů i stejnou posloupnost stupňů 2, 2, 2, 2, 3, 3. Pokud se však budeme snažit najít mezi nimi isomorfismus, něco stále nebude sedět, že? Co nám tedy v nalezení isomorfismu brání? Podívejme se, že v druhém grafu oba vrcholy stupně tři mají svého společného souseda, tvoří s ním trojúhelník. V prvním grafu tomu tak není, první graf dokonce nemá žádný trojúhelník. Proto zadané dva grafy nejsou isomorfní. □ □

**Poznámka:** Výše uvedené příklady nám ukazují některé cesty, jak poznat (tj. najít nebo vyloučit) isomorfismus dvou grafů. Ty však ne vždy musí fungovat. Čtenář se může ptát, kde tedy najde nějaký **univerzální postup pro nalezení isomorfismu?** □

Bohužel vás musíme zklamat, žádný rozumný univerzální postup není znám a zatím platí, že jediná vždy fungující cesta pro nalezení či nenalezení isomorfismu mezi dvěma grafy je ve stylu *vyzkoušejte všechny možnosti* bijekcí mezi vrcholy těchto grafů. (Těch je, jak známo, až  $n!$ )

## 1.4 Orientované grafy a multigrafy

V některých případech (například u toků v sítích) potřebujeme u každé hrany vyjádřit její směr. To vede na definici *orientovaného grafu*, ve kterém hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů. (V obrázcích kreslíme orientované hrany se šipkami.)



**Definice:** *Orientovaný graf* je uspořádaná dvojice  $D = (V, E)$ , kde  $E \subseteq V \times V$ .

**Fakt:** Orientované grafy odpovídají relacím, které nemusí být symetrické.

**Značení:** Hrana  $(u, v)$  v orientovaném grafu  $D$  *začíná* ve vrcholu  $u$  a *končí* ve (míří do) vrcholu  $v$ . Opačná hrana  $(v, u)$  je různá od  $(u, v)$ !  $\square$

Navíc někdy můžeme mluvit o tzv. *multigrafech*, ve kterých padají téměř všechna omezení na hrany...

V multigrafu může mezi dvojicí vrcholů vést libovolný počet hran – tzv. *násobné hrany*, a některé z nich mohou být i orientované.

Také jsou povoleny hrany, které mají oba konce totožné – tzv. *smyčky*.

**Definice:** *Multigraf* je uspořádaná trojice  $M = (V, E, \varepsilon)$ , kde  $V \cap E = \emptyset$  a  $\varepsilon : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup V \cup (V \times V)$  je incidenční zobrazení hran.

Značení  $\binom{V}{2}$  v definici reprezentuje neorientované hrany,  $V$  neorientované smyčky a  $V \times V$  orientované hrany a smyčky.



## 1.5 Implementace grafů

Mějme jednoduchý graf  $G$  na  $n$  vrcholech a značme vrcholy jednoduše čísly  $V(G) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Pro počítačovou implementaci grafu  $G$  se nabízejí dva základní způsoby:

- **Maticí sousednosti**, tj. dvourozměrným polem  $g[] []$ , ve kterém  $g[i][j]=1$  znamená hranu mezi vrcholy  $i$  a  $j$ .
- **Výčtem sousedů**, tj. použitím opět dvourozměrné pole  $h[] []$  a navíc pole  $d[]$  stupňů vrcholů. Zde prvky  $h[i][0], h[i][1], \dots, h[i][d[i]-1]$  udávají seznam sousedů vrcholu  $i$ .

**Poznámka:** Dávejte si pozor na **symetrii hran** v implementaci!

Implementace maticí sousednosti je hezká svou jednoduchostí.

Druhá možnost se však mnohem lépe hodí pro grafy s malým počtem hran, což nastává ve většině praktických aplikací.

(Navíc je implementace výčtem sousedů vhodná i pro multigrafy.)

Ke grafům lze do zvláštních polí přidat také *ohodnocení vrcholů a hran* libovolnými čísly či značkami...