FI: PODZIM 2007

Verze: 9. prosince 2007

Demonstrativní cvičení k předmětu MB102

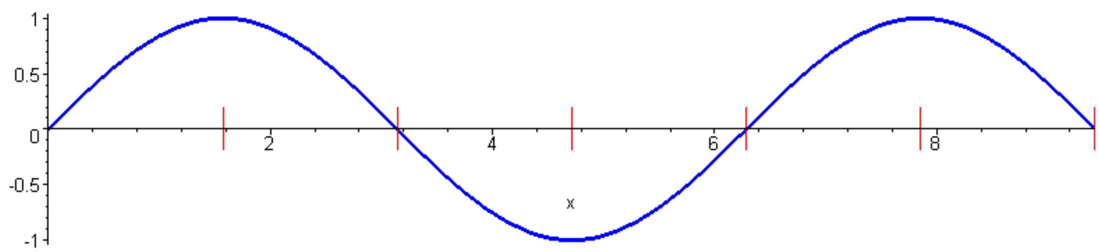
(Petr Hasil, hasil@math.muni.cz)

OBSAH

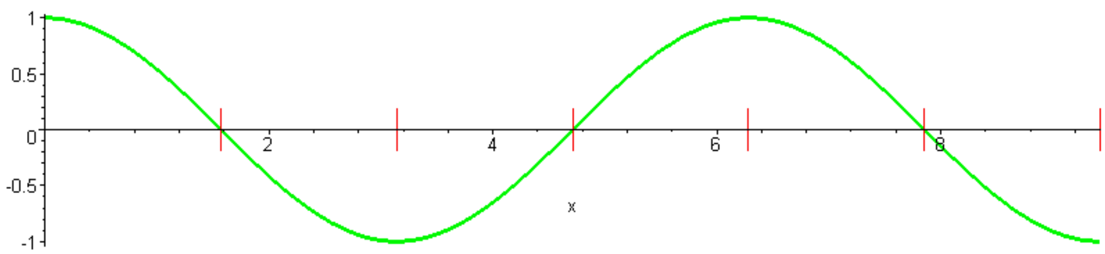
1. DEMONSTRATIVNÍ CVIČENÍ

Připomenutí

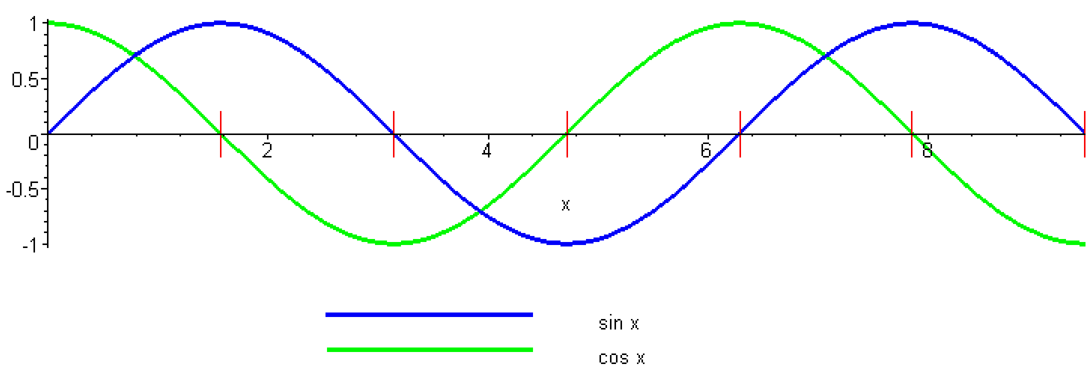
Goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické funkce



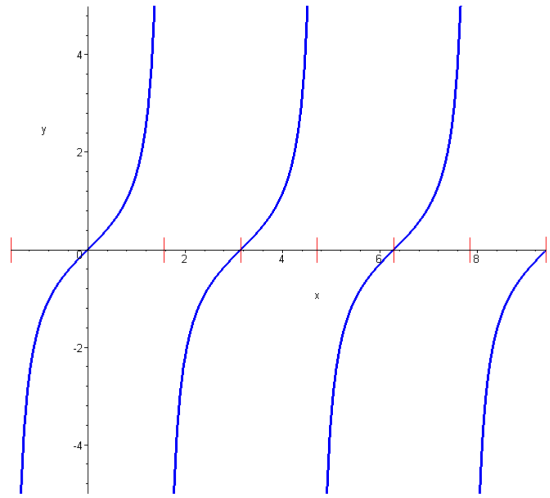
OBRÁZEK 1. Funkce sinus



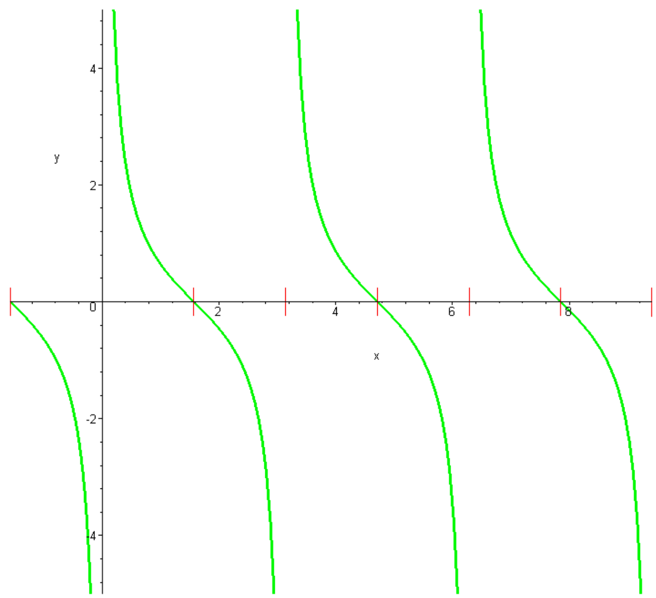
OBRÁZEK 2. Funkce kosinus



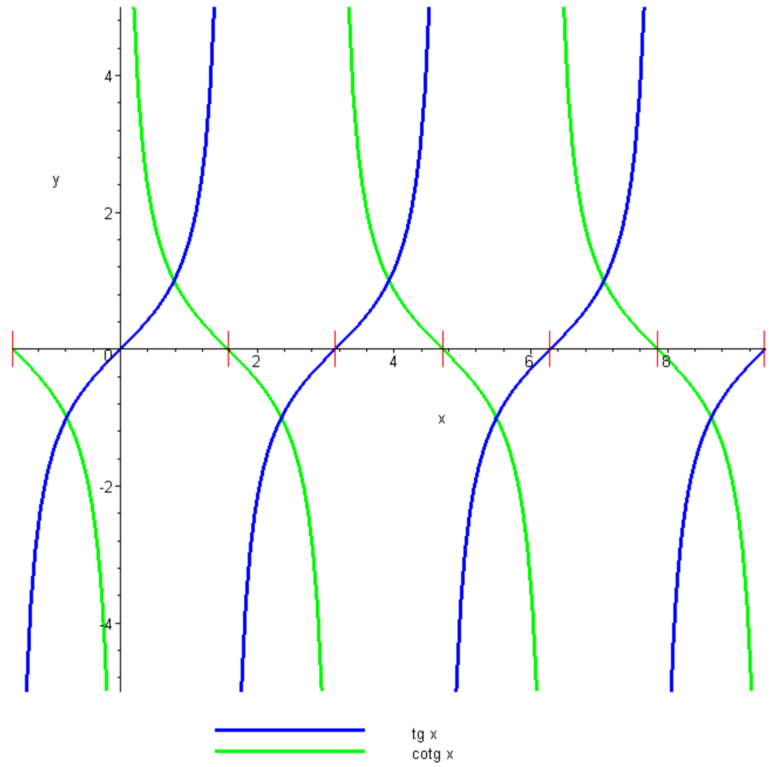
OBRÁZEK 3. Funkce sinus a kosinus



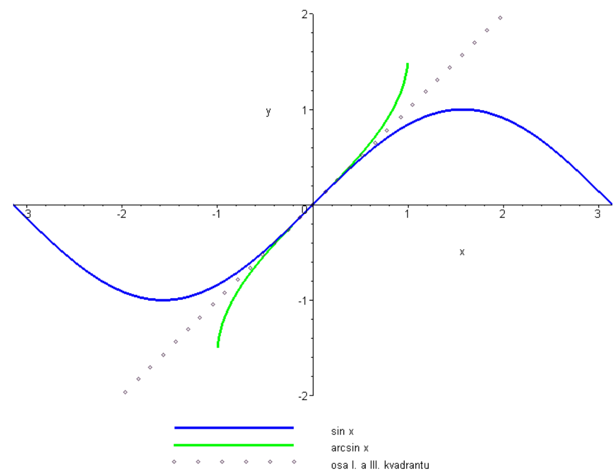
OBRÁZEK 4. Funkce tangens



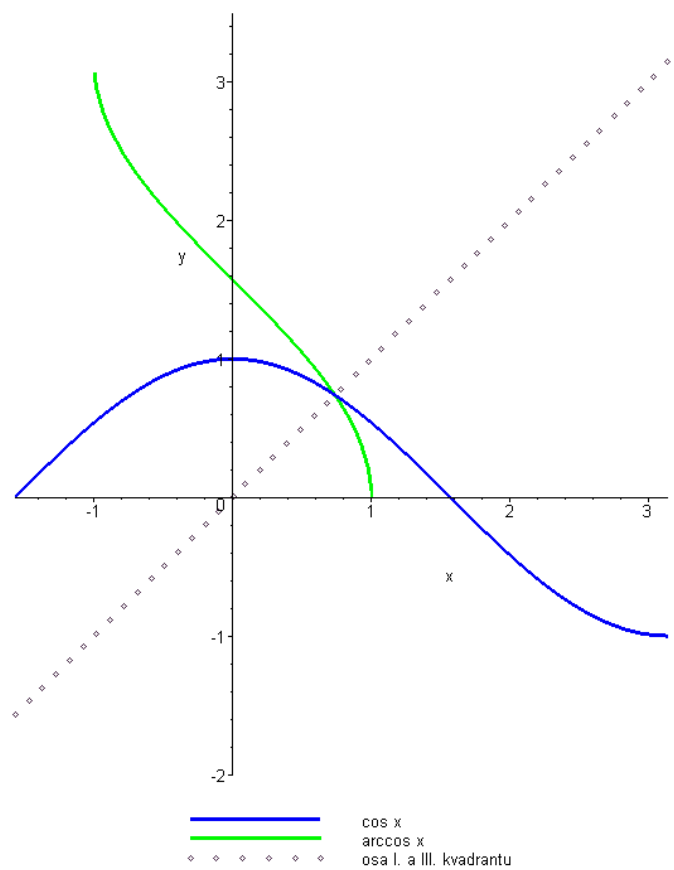
OBRÁZEK 5. Funkce kotangens



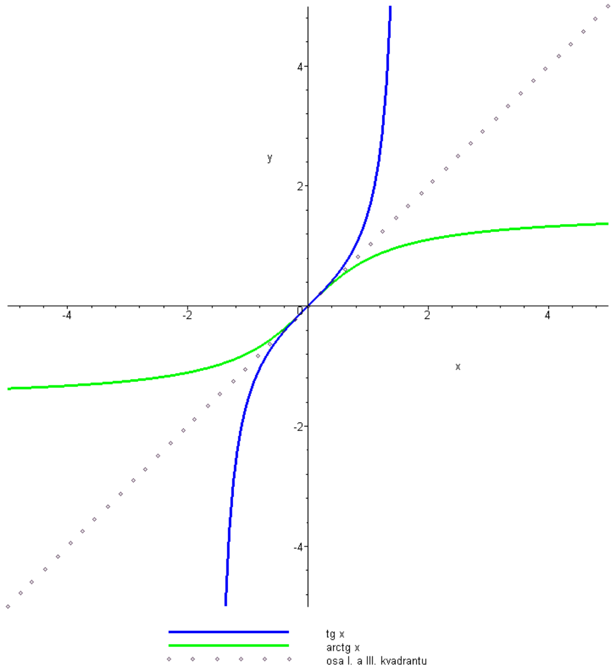
OBRÁZEK 6. Funkce tangens a kotangens



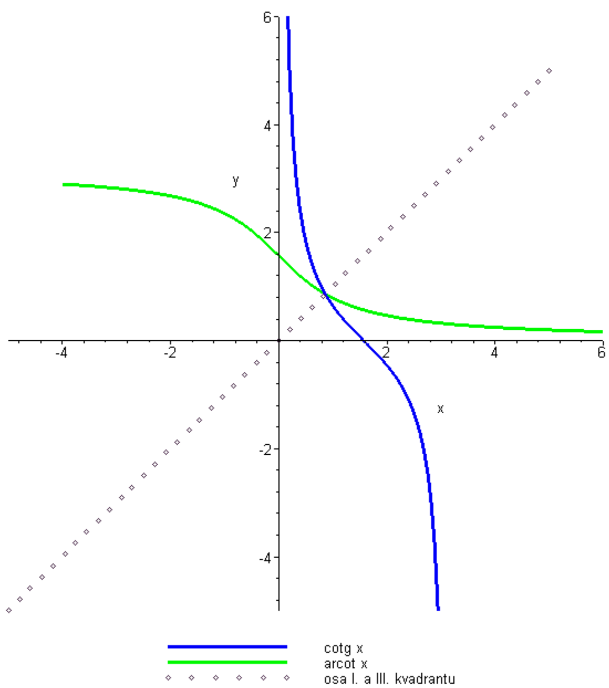
OBRÁZEK 7. Funkce arkussinus



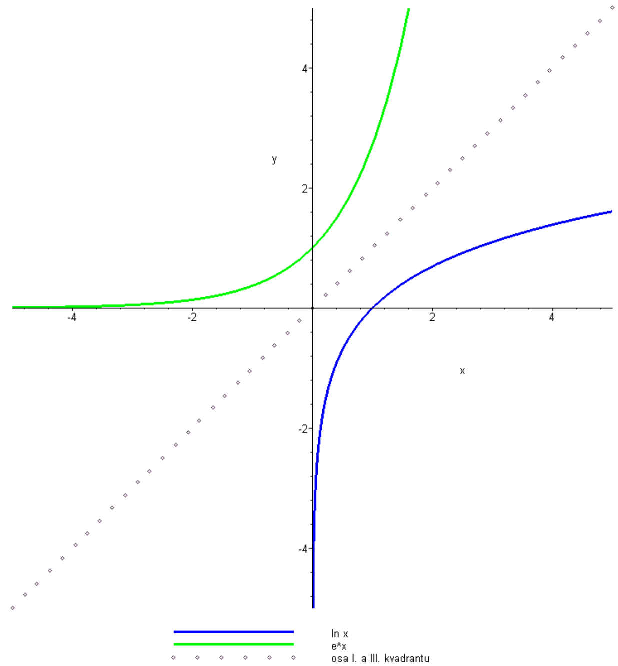
OBRÁZEK 8. Funkce arkuskosinus



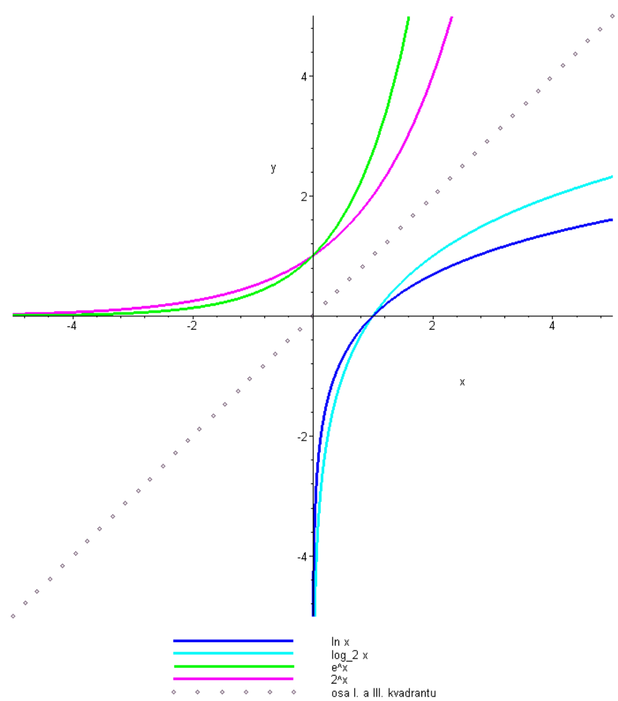
OBRÁZEK 9. Funkce arkustangens



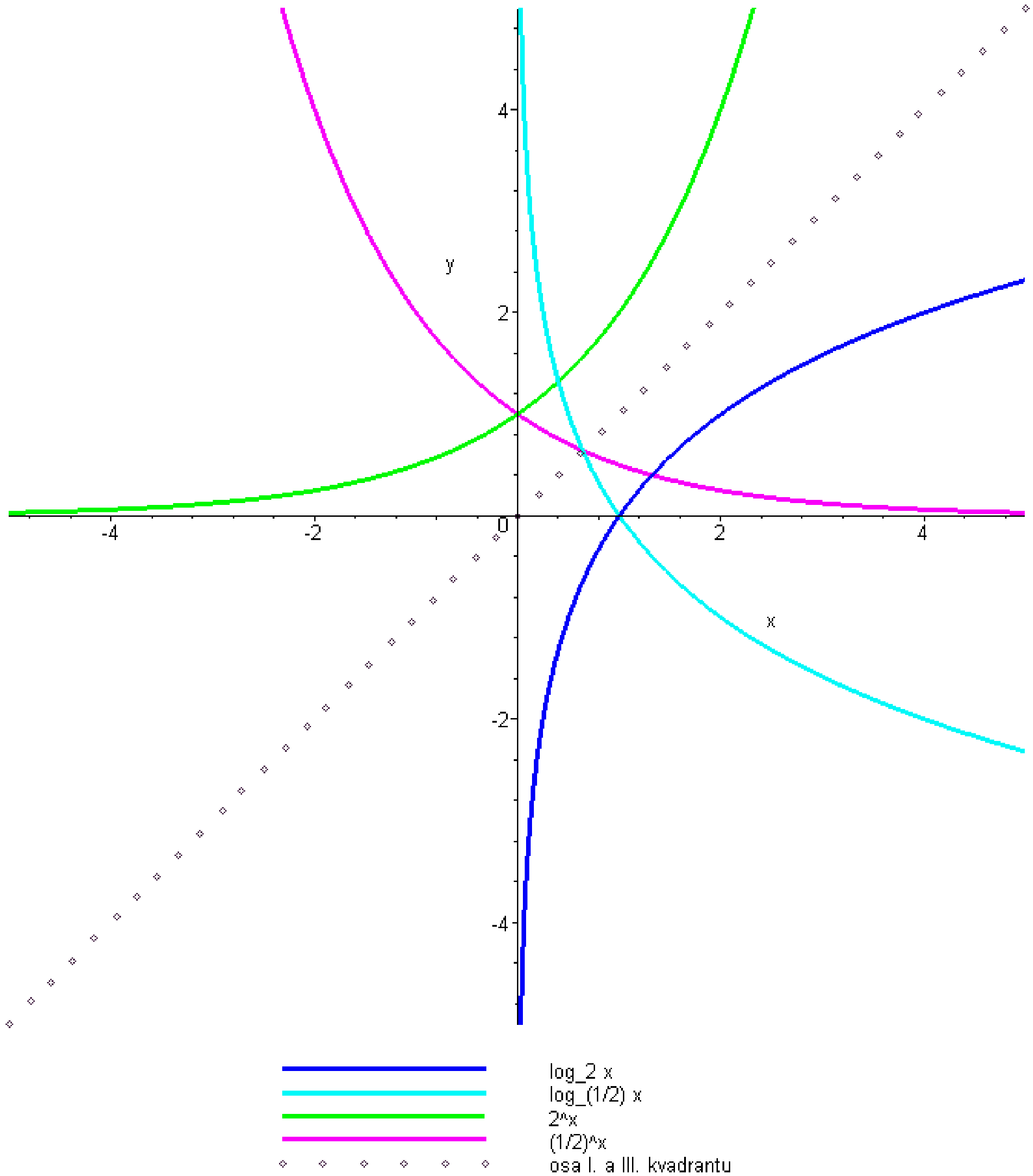
OBRÁZEK 10. Funkce arkuskotangens



OBRÁZEK 11. Funkce e^x a $\ln x$



OBRÁZEK 12. Logaritmické a exponenciální funkce



OBRÁZEK 13. Logaritmické a exponenciální funkce

Příklad 1. Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom, je-li dáno:

x_i	0	1	2	5
$f(x_i)$	2	3	12	147

[*Řešení:* $P(x) = x^3 + x^2 - x + 2$]

Příklad 2. Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci $f(x) = x + \sin x$ v uzlech $x_0 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4,5$, $x_3 = 10$, $x_4 = 5,5$ a $x_5 = 12,5$.

Počítejte s pomocí počítače. – (Příloha)

[*Řešení:* $P(x) = 0,00166192229x^5 - 0,0513743551x^4 + 0,545203518x^3 - 2,21991775x^2 + 3,09117021x + 2,88384950$]

Příklad 3. Najděte Hermitův interpolační polynom funkce dané tabulkou

x_i	0	1	4
$f(x_i)$	2	5	1
$f'(x_i)$	1	-1	2

Pomocné výpočty na počítači. – (Příloha)

[*Řešení:* $P(x) = -\frac{407}{864}x^5 + \frac{329}{72}x^4 - \frac{3953}{288}x^3 + \frac{5023}{432}x^2 + x + 2$]

Příklad 4. Sestrojte přirozený kubický interpolační splajn pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $[0, 3]$. Za uzly zvolte body $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.

[*Řešení:* $S_0(x) = 1 - \frac{11}{20}x + \frac{1}{20}x^3$ a $S_1(x) = \frac{43}{40} - \frac{31}{40}x + \frac{9}{40}x^2 - \frac{1}{40}x^3$]

Příklad 5. Rozložte následující racionální lomené výrazy na součet parciálních zlomků:

(i) $\frac{2x^5+5x^3-x^2+2x-1}{x^6+2x^4+x^2}$,

(ii) $\frac{2x^5-5x^4+5x^3-3x^2+10x-3}{x^4-x^3-x+1}$.

2. DEMONSTRATIVNÍ CVIČENÍ

Příklad 6. Určete suprema a infima následujících množin:

(i) $A = (-3, 2] \cup \{7\}$,
(ii) $B = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$,
(iii) $C = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Obrázek – *viz příloha.*

[*Řešení:* $\sup A = 7, \inf A = -3, \sup B = 1, \inf B = 1/2, \sup C = 1, \inf C = -1$]

Příklad 7. Určete limity:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

Obrázek – viz příloha.

[*Řešení:* $1, 1$]

Příklad 8. Spočtěte limity posloupností:

(i)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 2}{4n^3 - n},$$

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n),$$

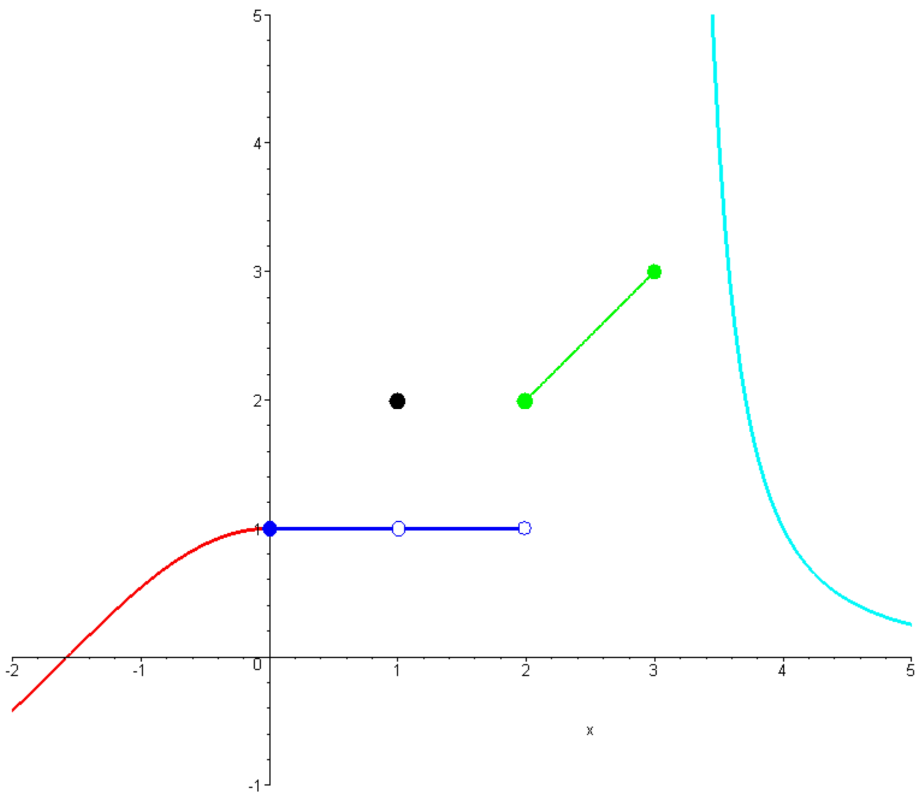
(iii)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5 - 4n}{2^n + 3^n + n^2}.$$

Obrázek – viz příloha.

[*Řešení:* $1/2, 1/2, 1$]

Příklad 9. Určete, zda je daná funkce spojitá/spojitá zleva/spojitá zprava v bodech $-\pi/2, 0, 1, 2, 3, 4$. Jestliže je nespojitá, určete druh nespojitosti.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0, \\ 1 & 0 \leq x < 1, \\ 2 & x = 1, \\ 1 & 1 < x < 2, \\ x & 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{(x-3)^2} & x > 3. \end{cases}$$



OBRÁZEK 14. Body nespojitosti

Příklad 10. Spočtěte limity (víme, že $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$):

(i)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x},$$

(ii)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x+\sin x}{2x+\cos x},$$

(iii)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin 2x},$$

(iv)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2},$$

(v)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x^2-3x+2},$$

(vi)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

[*Řešení:* $5/7, \pi/2, 1, 5,$ neexistuje,1]

Příklad 11. Je dána funkce
$$f(x) = \frac{\ln(2x^3 + 4x^2 - x)}{1 + x}.$$
Určete rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[1, f(1)]$.

Viz příloha.

[*Řešení:* $t : y - \frac{\ln 5}{2} = \left(\frac{13}{10} - \frac{\ln 5}{4}\right)(x - 1)$, $n : y - \frac{\ln 5}{2} = \frac{20}{5\ln 5 - 26}(x - 1)$.]

3. DEMONSTRATIVNÍ CVIČENÍ

Příklad 12. Spočtěte derivace následujících funkcí:

(i)
$$\sin[\ln(x^3 + 2x)],$$

(ii)
$$\operatorname{cotg}(\mathrm{e}^{(x^2+1)\sin x}).$$

[*Řešení:* $\frac{3x^2+2}{x^3+2x}\cos[\ln(x^3+2x)], -\frac{2x\sin x+(x^2+1)\cos x}{\sin^2(\mathrm{e}^{(x^2+1)\sin x})}\mathrm{e}^{(x^2+1)\sin x}$]

Příklad 13. Hyperbolické funkce jsou dány takto:

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \mathrm{tgh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \quad \mathrm{cotgh} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$

Určete derivace těchto funkcí:

- Pomocí definice derivace.
- Přímým výpočtem.

[*Řešení:* $(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x, (\mathrm{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, (\mathrm{cotgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$]

Příklad 14. Pomocí inverzní funkce najděte derivaci funkcí

$$\mathrm{argsinh} x, \quad \mathrm{argcosh} x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x.$$

[*Řešení:* $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.]

Příklad 15. Určete derivace následujících funkcí ($x > 0$):

$$f(x) = x^x, \qquad g(x) = x^{\sin x}$$

[*Řešení:* $f'(x) = x^x(\ln x + 1), g'(x) = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$.]

Příklad 16. Následující limity jsou (po řadě) následujících typů:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Jejich typ ověřte a spočtěte je.

(i)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)},$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\mathrm{cotg}\, x},$$

(iii)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right),$$

(iv)

$$\lim_{x \to 1^+} [\ln x \ln(x-1)],$$

(v)

$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{cotg}x)^{\frac{1}{lnx}},$$

(vi)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

(vii)

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)^{\ln x}.$$

[***Řešení:*** $(i) - \frac{2}{\pi}, (ii) 0, (iii) \frac{1}{2}, (iv) 0, (v) \frac{1}{\mathrm{e}}, (vi) \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}, (vii) 1.$]

Příklad 17. Určete limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$$

[*Řešení:* 0.]

Příklad 18. Najděte obecnou rovnici tečny ke grafu funkce (dané implicitně)

$$y \log_2 x + \sin y = 0$$

v bodě $[x_0, y_0] = [1, ?]$, kde $y_0 \in [1/2, 7/2]$.

[*Řešení:* $y = \frac{\pi}{\ln 2} x + \pi - \frac{\pi}{\ln 2}$.]

Příklad 19. Je dána funkce
$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}.$$
Vyšetřete její průběh – tj. určete:

(a) definiční obor a obor hodnot,
(b) sudost/lichost,
(c) průsečíky s osami x, y,
(d) kde je funkce kladná/záporná,
(e) intervaly monotonie,
(f) konvexnost/konkávnost,
(g) lokální extrémy a inflexní body,
(h) asymptoty se směrnicí/bez směrnice,
(i) načrtněte graf.

[*Řešení: Viz* *příloha.*]

Příklad 20. Vyšetřete průběh funkcí:

(i)
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1},$$

(ii)

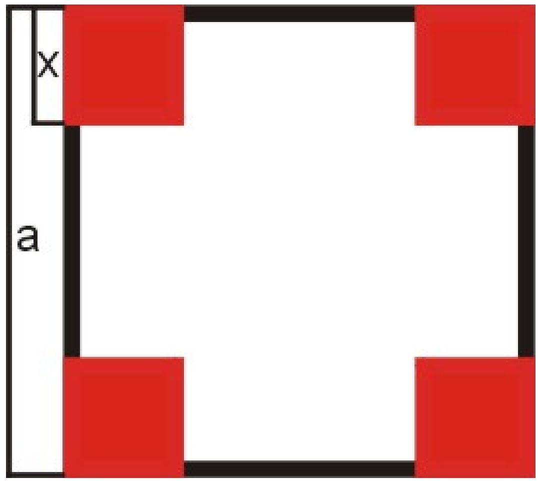
$$g(x) = -\frac{x^2}{x+1},$$

(iii)
$$h(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

[*Řešení: Viz příloha.*]

5. Demonstrativní cvičení

Příklad 21. Je dán čtverec papíru. Z každého rohu odstraňte menší čtvereček tak, aby krabička poskládaná ze zbytku papíru měla maximální objem – viz obrázek a animace 01, 02, 03.



[*Řešení:* $x = \frac{a}{6}, V = \frac{2a^3}{27}$.]

Příklad 22. Číslo 28 rozložte na 2 nezáporné sčítance tak, aby součet druhé mocniny prvního sčítance a třetí mocniny druhého sčítance byl minimální.

[*Řešení:* 4, 24.]

Příklad 23. Vepište do půlkružnice (poloměr r) obdélník o:

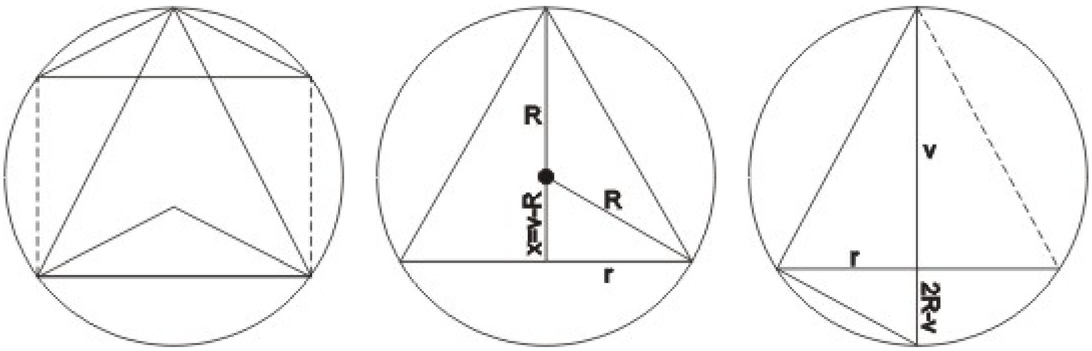
(i) největším možném obsahu,
(ii) největším možném obvodu.

Příslušný obsah a obvod určete.

Ilustrovaný postup řešení k bodu (i) najdete zde.

[***Řešení:*** $(i) a = \sqrt{2}r, b = \frac{\sqrt{2}}{2}r, S = r^2, (ii) a = \frac{4\sqrt{5}}{5}r, b = \frac{2\sqrt{5}}{5}r, O = 2\sqrt{5}r.$]

Příklad 24. Zjistěte výšku v a poloměr podstavy r nejobjemnějšího kužele, který se vejde do koule o poloměru R



[*Řešení:* $v = \frac{4}{3}R, r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$]

Příklad 25. Určete Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě 1 funkce $f(x) = 1/x$. Určete také tvar zbytku.

[***Řešení:*** $T_4(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 5, R_4(x) = \frac{-1}{c^6}(x-1)^5$]

Příklad 26. Použitím základních vzorců určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

(i)
$$f(x) = x^2(5-x)^3,$$

(ii)
$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}},$$

(iii)
$$h(x) = (2^x + 3^x)^2,$$

(iv)
$$k(x) = 1 + \sin x + \cos x.$$

[*Řešení:* $(i)\frac{-1}{6}x^6 + 3x^5 - \frac{75}{4}x^4 + \frac{125}{3}x^3 + c, (ii)\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c,$
$(iii)\frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c, (iv)x - \cos x + \sin x + c$]

Příklad 27. Integrujte per-partes:

(i)

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

[***Řešení:*** $(i)\sin x - x\cos x + c, (ii)\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + c$]

6. Demonstrativní cvičení

Příklad 28. Integrujte per-partes:

(i)

$$\int \mathrm{arctg} x \, \mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

[***Řešení:*** $(i) x \mathrm{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c, (ii) \frac{\ln^2 x}{2} + c$]

Příklad 29. Integrujte užitím substituční metody:

(i)
$$\int (2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x,$$

(v)
$$\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

[*Řešení:* $(i)\frac{(2x+5)^{11}}{22}+c, (ii)\frac{\ln^2 x}{2}+c, (iii)2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+c, (iv)\frac{-1}{\ln x}+c, (v)(\mathrm{arctg}\sqrt{x})^2+c$]

Příklad 30. Integrujte:

(i)
$$\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x, \quad n \neq -1,$$

(ii)
$$\int x\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int \frac{x}{1+x^4} \,\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \,\mathrm{d}x.$$

[*Řešení:* (i) [pp] $\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c, (ii)$ [pp] $-\mathrm{e}^{-x}(x+1) + c,$
(iii) [subst] $\frac{\mathrm{arctg} x^2}{2} + c, (iv)$ [subst] $\sin^{3/2} x (\frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x) + c$]

Příklad 31. Integrujte racionální lomené funkce:

(i)
$$\int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int \frac{3}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int \frac{3x+5}{(x^2+4x+8)^3}\,\mathrm{d}x.$$

[***Řešení:*** $(i) 3\ln|x-2|+c$, $(ii) \frac{-3}{2(x-2)^2}+c$,
$(iii) \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{2}+c$,
$(iv) \frac{-3}{4(x^2+4x+8)^2}-\frac{1}{32}\left[\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{3t}{8(1+t^2)}+\frac{3}{8}\mathrm{arctg} t\right]+c$, kde $t=\frac{x+2}{2}$]

Příklad 32. Integrujte racionální lomené funkce:

(i)

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int \frac{1}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x.$$

[*Řešení:* $(i)\frac{-1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c, (ii)\frac{\ln|x-1|}{3} - \frac{\ln(x^2+x+1)}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$]

Příklad 33. Najděte primitivní funkci k funkci
$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)}.$$

[***Řešení:*** $\ln|\ln x - 1| - \frac{1}{2}\ln(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + 3\mathrm{arctg}(\ln x + 1) + c, x \in (0, \mathrm{e}) \cup (\mathrm{e}, \infty)$]

7. Demonstrativní cvičení

Příklad 34. Je dána funkce $f(x) = x^2 - 3x + 5$ na intervalu $I = [2, 5]$.

(i) Určete $s(D, f)$ a $S(D, f)$ pro dělení intervalu I vytvořené pomocí bodů $2, 5; 3; 4$.
(ii) Najděte primitivní funkci k funkci f.
(iii) Je-li funkce f v Riemannově smyslu integrovatelná, pak tento integrál určete.
(iv) Určete průměr funkce f.
(v) Rozhodněte, zda fce f nabývá v I hodnoty svého průměru. Jestliže ano, pak tento bod určete.

[*Řešení:* $(i) s = 17,375; S = 28,375; (ii) \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c; (iii) 22,5; (iv) 7,5; (v) \frac{3+\sqrt{19}}{2}$.]

Příklad 35. Udejte příklad funkce, pro kterou platí:

$$\underline{\int_{-1}^{1}} f(x) = -5, \qquad \overline{\int_{-1}^{1}} = 4.$$

Příklad 36. Je dána funkce $f(x) = |x|$ na intervalu $I = [-1, 1]$ a dělení $D_n = \{-1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Určete $s(D_n, f)$ a $S(D_n, f)$.

[*Řešení:* $s = \frac{n-1}{n}, S = \frac{n+1}{n}$.]

Příklad 37. Spočtěte:

(i)

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int_1^2 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

(iii)

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x,$$

[***Řešení:*** $(i)\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2},(ii)\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}),(iii)\frac{\pi+2}{4}$.]

Příklad 38. Spočtěte:

(i)

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int \sin^5 x \mathrm{d}x,$$

(iii)

$$\int \mathrm{e}^{-x^3} x^2 \mathrm{d}x.$$

[*Řešení:* $(i)\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c, (ii) - \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + c, (iii) - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x^3} + c.$]

Příklad 39. Spočtěte:

(i)

$$\int \cos^3 x \sin x \mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x,$$

(iii)

$$\int 2\sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x.$$

[***Řešení:*** $(i) - \frac{\cos^4 x}{4} + c, (ii) \frac{\mathrm{tg} x}{2} + \frac{x}{2} + c, (iii) x - \sin x + c.$]

Příklad 40. Spočtěte:

(i)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int\limits_0^{\ln 2} \frac{x}{\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x,$$

(iii)

$$\int\limits_0^{1} x(2-x^2)^5 \mathrm{d}x,$$

(iv)

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}^8} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x + 1}}.$$

[***Řešení:*** $(i) 1, (ii) \frac{1-\ln 2}{2}, (iii) \frac{63}{12}, (iv) 4.$]

Příklad 41. Určete v jakém poměru dělí křivka $P : y^2 = 2x$ plochu kruhu $K : x^2 + y^2 = 8$.

[*Řešení:* $(\pi + 2/3) : (3\pi - 2/3)$]

Příklad 42. Určete délku jednoho oblouku cykloidy $x(t) = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$.

[*Řešení:* $8r$]

Příklad 43. Vypočtěte délku řetězovky $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ na intervalu $[-1, 1]$.

[*Řešení:* $a(\mathrm{e}^{1/a} - \mathrm{e}^{-1/a})$.]

Příklad 44. Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet plochy elipsy s poloosami a, b. (Jak to dopadne pro kruh?)

[***Řešení:*** $S_E = \pi ab, S_K = \pi r^2$.]

Příklad 45. Vypočtěte objem komolého kužele s poloměrem podstav r_1, r_2 a výškou v. Jaký je potom objem "nekomolého" kužele?

Pro lepší pochopení – výpočet objemu.

[*Řešení:* $V_{KK} = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2), V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$]

Příklad 46. Určete následující integrály:

(i)
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int_0^\infty \cos x\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

[***Řešení:*** $(i)\frac{\pi}{2}, (ii)\infty(diverguje), (iii)neexistuje(osciluje), (iv)\pi.$]

Příklad 47. Spočtěte:

(i)

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2+2}{x^3} \mathrm{d}x.$$

[*Řešení:* $(i) 2/\mathrm{e}, (ii) \infty.$]

9. DEMONSTRATIVNÍ CVIČENÍ

Příklad 48. Vyřešte:

(a) Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, na intervalu $[2, \infty)$.

(b) Určete obsah plochy ohraničené na intervalu $[2, \infty)$ grafy funkcí f a g, kde

$$f(x) = (x+1)\frac{x^2-x+1}{x^2+x-2},$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2+x-2}.$$

[*Řešení:* $(a, b)\frac{2}{3}\ln 2$.]

Příklad 49. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ integrál $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ konverguje/diverguje.

[*Řešení:* Div. pro $\alpha \leq 1$, konv. pro $\alpha > 1$.]

Příklad 50. Spočtěte:

(i)

$$\int_0^4 \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{x} \mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{2\cos x}{1 + \sin x} \mathrm{d}x.$$

[*Řešení:* $(i)20, (ii) - \infty$.]

Příklad 51. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ integrál $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje/diverguje.

[*Řešení:* Div. pro $\alpha \geq 1$, konv. pro $\alpha < 1$.]

Příklad 52. Určete součty:

(i)

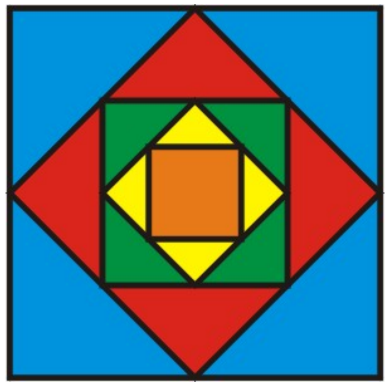
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n},$$

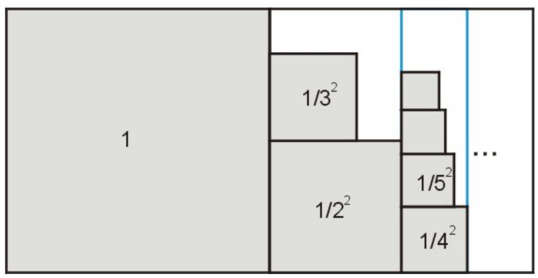
(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}.$$

[*Řešení:* $(i) 9/4, (ii) 1/4.$]

Příklad 53. Dostali jsme pět metrů drátu a úkol sestrojit z něj čtverec o délce strany čtvrt metru. Potom máme za úkol spojit drátem středy jeho sousedních stran, a tak vytvořit obrázek dvou čtverců. Postup máme opakovat do nekonečna (viz obrázek). Bude nám drát stačit? Pokud ano, kolik jej spotřebujeme?
Jakou plochu naše čtverce pokryjí, jestliže je naskládáme vedle sebe?





(Doporučení: Pro přehlednost výpočtů uvažujte původní čtverec o straně obecné délky a *a dosaďte až v závěru.)*

[*Řešení:* Spotřebujeme cca $3,41$ metrů drátu. Plocha přesně $12,5\mathrm{dm}^2$, tj. dvakrát plochu největšího čtverce.]

Příklad 54. Pomocí srovnávacího kriteria (tj. srovnáním s vhodnou řadou) zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}.$$

(U tohoto a všech následujících příkladů ověřujte nutnou podmínku konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*)*

[*Řešení:* $(i)ano, (ii)ne.$]

Příklad 55. Užitím integrálního kriteria zjistěte, zda daná řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

[*Řešení: ano.*]

Příklad 56. Užitím podílového kriteria zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!},$$

(ii)

$$\sum_{n=25}^{\infty} \frac{n}{2n-1}.$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}.$$

[*Řešení: (i)ano, (ii)ne, (iii)ne.*]

Příklad 57. Užitím odmocninového kriteria zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)},$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

[*Řešení: (i)ano, (ii)ano.*]

Příklad 58. Určete, zda daná řada konverguje. U řady (ii) navíc odhadněte chybu aproximace částečným součtem s_8 a $s_{9\,999}$. Je zbytek po odečtení s_8, resp. $s_{9\,999}$ kladný nebo záporný?

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n-1},$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

[*Řešení:* Obě konv. $s_8 : < 3/109$, záporný; $s_{9\,999} : < 1/101$, kladný.]

Příklad 59. Určete, zda daná řada konverguje absolutně/relativně/nekonverguje.

(i)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n,$$

(ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1},$$

(iii)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}.$$

[*Řešení: (i) abs., (ii) rel., (iii)abs.*.]

Příklad 60. Určete poloměr a interval konvergence.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)8^n},$$

(ii)

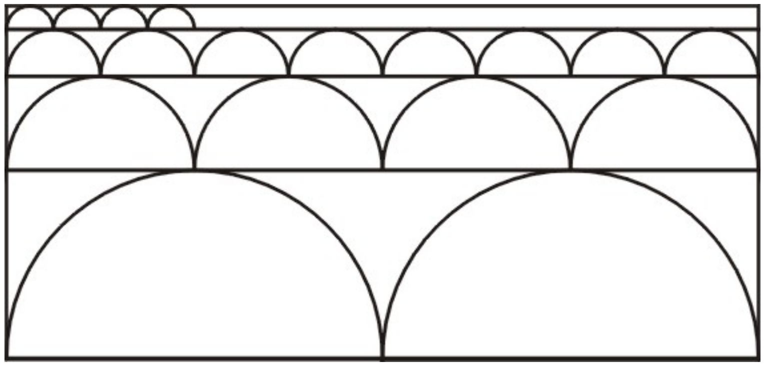
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n,$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

[***Řešení:*** $(i) 8, [-8, 8); (ii) 0, \{5\}; (iii) 1, [-4, 2]$.]

Příklad 61. Je dána posloupnost řádků půlkruhů, kde v n-tém řádku je 2^n půlkruhů o poloměru $\frac{1}{2^n}$ (viz obrázek). Určete plochu, kterou tyto půlkruhy pokrývají. Výsledek interpretujte vzhledem k obsahu největších (půl)kruhů.



[*Řešení:* $\pi/2$, *tj. dvojnásobek plochy kruhu o poloměru 1/2.*]

Příklad 62. Ze znalosti Taylorova rozvoje funkce $\sin x$ určete rozvoj funkce $\cos x$.

[*Řešení:* $\cos x = (\sin x)'$]

Příklad 63. Ověřte pomocí Taylorova rozvoje, že $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Příklad 64. Ze znalosti Taylorova rozvoje funkce e^x určete rozvoj funkcí e^{-x}, e^{x^2}. Ověřte výsledek přímým výpočtem T. řad.

Příklad 65. Určete funkci, jejíž Taylorova řada je $(-1 \leq x \leq 1)$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots .$$

[*Řešení:* $\mathrm{arctg} x$]

Příklad 66. Určete, zda daná řada konverguje absolutně/relativně/nekonverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

[*Řešení: Konv. abs.*]

Příklad 67. Na intervalu konvergence $I = (-1, 1)$ určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

[*Řešení:* $\frac{2x}{(1-x)^3}$.]

11. Demonstrativní cvičení

Příklad 68. Na intervalu konvergence $I = (-1, 1]$ určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

[*Řešení:* $\ln(1+x) \cdot (x+1) - x$.]

Příklad 69. Určete mocninou řadu, jejíž součet je roven výrazu

$$\frac{1}{x^2 - x - 12}.$$

(Řada k tomuto součtu konverguje na intervalu $I = (-3, 3)$.)

[*Řešení:* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{1}{21 \cdot 3^n} - \frac{1}{28 \cdot 4^n}\right] x^n$.]

Příklad 70. Pomocí prvních dvou členů Taylorova polynomu určete přibližně hodnotu $\sqrt[3]{70}$.

[*Řešení:* $\sqrt[3]{70} \approx 4\left(1 + \frac{1}{3}\frac{3}{32}\right) = 4 + \frac{1}{8} = 4,125$. *(Přesná hodnota je* $4,1212853$.*)*]

Příklad 71. Odhadněte kosinus deseti stupňů s přesností aspoň 10^{-5}.

[*Řešení:* $\cos\frac{\pi}{18} \approx 1 - \frac{(\frac{\pi}{18})^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{18})^4}{4!} \doteq 0,985.$]

Příklad 72. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y' = (2 - y)\mathrm{tg}x.$$

[*Řešení:* $y = 2 - K\cos x$.]

Příklad 73. Určete řešení diferenciální rovnice

$$1 + y^2 - xy(1 + x^2)y' = 0.$$

[*Řešení:* $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = K\sqrt{1 + y^2}$.]

Příklad 74. Určete řešení diferenciální rovnice

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}.$$

[*Řešení:* $y = x\mathrm{e}^{xK+1}$.]

Příklad 75. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

[*Řešení:* $y = \mathrm{e}^{-x^2}(\frac{x^2}{2} + K)$.]

Příklad 76. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y' + y = x\sqrt{y}.$$

[*Řešení:* $y = (x - 2 + K\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})^2$.]

Příklad 77. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

[*Řešení:* $c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-2x}$.]

Příklad 78. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 9y^{(2)} = 0.$$

[***Řešení:*** $c_1 + c_2x + c_3\mathrm{e}^{-3x} + c_4x\mathrm{e}^{-3x}$.]

Příklad 79. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = (20x + 29)\mathrm{e}^{3x}.$$

[*Řešení:* $c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{-2x} + (x+1)\mathrm{e}^{3x}$.]

Příklad 80. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = 10\cos x.$$

[***Řešení:*** $c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{x} + \cos x - 3\sin x$.]

Příklad 81. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' = 4x + 2\cos 2x.$$

[***Řešení:*** $c_1 + c_2 \mathrm{e}^{2x} - x - x^2 - \frac{1}{4}(\cos 2x + \sin 2x)$.]

Příklad 82. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x} \ln x.$$

[*Řešení:* $(c_1 + c_2 x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} \ln x)\mathrm{e}^{-x}$.]

OPAKOVÁNÍ

Příklad 83. Integrujte:

$$\int \frac{3x^2 + 6x + 2}{-x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \mathrm{d}x.$$

[*Řešení:* $\frac{11}{5} \ln|x-1| - \frac{13}{4} \ln|2-x| + \frac{21}{20} \ln(x^2+4) + \frac{13}{20} \mathrm{arctg} \frac{x}{2} + c.$]

Příklad 84. Určete Taylorův polynom čtvrtého řádu se středem v bodě 1 funkce $f(x) = \ln x^2$.

[*Řešení:* $2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{(x-1)^4}{2}$.]

Příklad 85. Derivujte:

(a)

$$f(x) = \ln x + \left(\cos \mathrm{e}^{x^2}\right)^{\pi},$$

(b)

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^5}.$$

[*Řešení:* $f'(x) = \frac{1}{x} - 2\pi x \mathrm{e}^{x^2} \sin \mathrm{e}^{x^2} \left(\cos \mathrm{e}^{x^2}\right)^{\pi - 1}$, $g'(x) = \frac{-2x^3 - 3x^2 + 5}{x^6}$.]

Příklad 86. Určete definiční obor funkcí

(a)

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-5},$$

(b)

$$g(x) = \cos(\sqrt{6-x^2}).$$

[*Řešení:* $D(f) = (0,5) \cup (5,\infty), D(g) = [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$.]

Příklad 87. Je daná funkce sudá/lichá?

(a)
$$f(x) = \frac{x \cos x}{x^4},$$

(b)
$$g(x) = \frac{x \cos x}{x^5},$$

(c)
$$h(x) = \frac{x \cos x}{x^2} + 1,$$

[*Řešení: lichá, sudá, nic.*]

Příklad 88. Určete, pro které hodnoty x je funkce záporná.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$$

[*Řešení:* $(-\infty, -2) \cup (0, 4)$.]

Příklad 89. Najděte intervaly monotonie funkce f.

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - 4x^2$$

[*Řešení: klesající na* $(-\infty, -2] \cup [0, 4]$*, rost. na* $[-2, 0] \cup [4, \infty]$.]

Příklad 90. Určete intervaly, na kterých je graf funkce f nad/pod tečnou.

$$f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{6} - \frac{4}{3}x^3$$

[*Řešení: konvexní (nad) na* $[-2, 0] \cup [4, \infty]$, *konkávní (pod) na* $(-\infty, -2] \cup [0, 4]$.]

Příklad 91. Určete asymptoty funkce f (se směrnicí i bez směrnice).

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

[*Řešení: v* 0 *bez sm., se sm. v* $+\infty$ *nemá, v* $-\infty$ *má* $y = 0$.]

Příklad 92. Určete asymptoty funkce f (se směrnicí i bez směrnice).

$$f(x) = 2x + \mathrm{e}^{-x} + 1$$

[*Řešení: bez sm. nemá, se sm. pouze v* $+\infty$*:* $y = 2x + 1$.]