Matematika III A
4. ledna 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně bonusu) je 15 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Spojitá funkce nabývá na kompaktní množině svého absolutního extrému výhradně v některém stacionárním bodě.

(b) **ano — ne** Množina $\{[x,y] \in E_2;\ x^2 + y^2 < 1\}$ je otevřená.

(c) **ano — ne** I v konečném grafu může existovat nekonečný tah.

(d) **ano — ne** Graf o n vrcholech, který neobsahuje kružnice a má $n-1$ hran, je nutně stromem.

(e) **ano — ne** Orientovaný graf je eulerovský, právě když je vyvážený a slabě souvislý.

(f) **ano — ne** Úplný bipartitní graf $K_{4,4}$ není rovinný.

Příklady:

1. (8 bodů) Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte stacionární body funkce

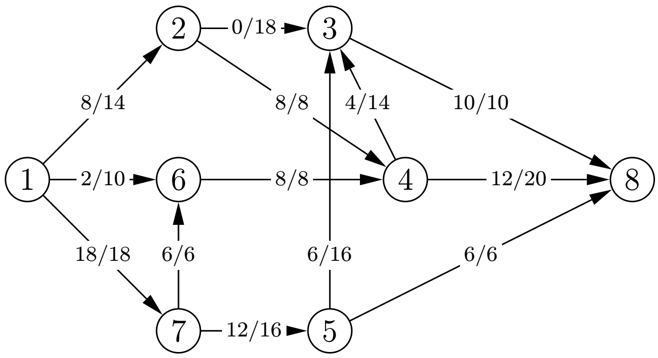
$$\cos^2 x + \cos^2 y$$

na množině M dané rovnicí $x - y = \frac{\pi}{4}$. Určete (a zdůvodněte), jde-li o extrémy a v kladném případě i jakého typu jsou tyto extrémy (maximum, resp. minimum). Hodnotu funkce v těchto bodech určovat nemusíte.

2. (6 bodů) Na obrázku 1 je uveden tok v dané síti (čísla f/c udávají současný tok a kapacitu dané hrany). Zjistěte, je-li uvedený tok maximální, pokud ano, své tvrzení zdůvodněte. Pokud maximálním tokem není, maximální tok najděte a svůj postup podrobně popište. Uveďte některý minimální řez v dané síti.

3. (6 bodů) Určete souřadnice těžiště homogenní destičky, ohraničené grafy křivek $y = x^2$ a $x + y = 2$.

4. (4 body) Nakreslete 2 neizomorfní grafy mající skóre $(2,3,3,3,3,3,5)$. Zdůvodněte.



Obr. 1: Obrázek k příkladu na tok v sítích (1 = zdroj, 8 = stok).

Návod k řešení:

Teorie: a) NE - extrém může být i na hranici nebo v bodech, kde není funkce diferencovatelná; b) ANO - jde o otevřený kruh; c) NE - v tahu se nemohou opakovat hrany, kterých je konečně mnoho; d) ANO - základní charakterizační věta; e) ANO; f) ANO - Kuratowského věta.

1. $L(\lambda, x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y - \lambda(x - y - \pi/4)$. Pak

$$\begin{aligned} L'_x &= -\sin 2x - \lambda = 0, \\ L'_y &= -\sin 2y + \lambda = 0, \\ x - y &= \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

odkud $\sin 2x + \sin(2x - \frac{\pi}{2} = 0$, tj. $\sin 2x - \cos 2x = 0$, a tedy $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Dostáváme všechny stacionární body

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ y = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$

Derivací vazebné podmínky dostaneme $\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$ a vypočteme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce

$$\mathrm{d}^2 L(\lambda, x, y) = -2\cos 2x(\mathrm{d}x)^2 + 2\cos 2y(\mathrm{d}y)^2.$$

Odtud plyne, že pro k liché je druhý diferenciál záporný a v příslušných bodech nastává minimum, pro k sudé pak maximum (pozn: v tomto příkladu jsme podmínku z derivace vazebné podmínky nevyužili, obecně je ale třeba ji vzít v úvahu).

2. $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 8$ je nenasycená (neorientovaná) cesta o kapacitě 4, po úpravě toku již dostaneme maximální tok o kapacitě 32, což vidíme z existence řezu $(2,4), (6,4), (3,8), (5,8)$ téže velikosti (je tedy tento řez minimální).

3. Nejprve vypočteme průsečíky $[-2, 4]$ a $[1, 1]$ obou křivek. Souřadnice těžiště vypočteme pomocí vztahů

$$M = \int\int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots = \frac{9}{2},$$

$$T_x = \frac{1}{M}\int\int_A x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots = -\frac{1}{2}$$

a

$$T_y = \frac{1}{M}\int\int_A y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots = \frac{8}{5}.$$

(výpočty příslušných integrálů jsou přímočaré, proto je neuvádíme). Vhodná kontrola správnosti je rovněž, že v případě konvexního útvaru leží těžiště vždy uvnitř něj.

4. Snadné – např. přidáním vrcholu stupně 5 k C_6, resp. $C_3 \cup C_3$.

Matematika III

B

4. ledna 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Potřebné minimum (včetně bonusu) je 15 bodů.
Na práci máte 90 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Jsou-li všechny hlavní minory matice A záporné, je A negativně definitní.

(b) **ano — ne** Existuje-li limita funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v daném bodě, pak je f v tomto bodě spojitá.

(c) **ano — ne** Spojitá diferencovatelná funkce nabývá na kompaktní množině svého absolutního extrému výhradně v některém stacionárním nebo hraničním bodě.

(d) **ano — ne** Je-li hessián funkce f v daném stacionárním bodě pozitivně definitní, je tento bod lokálním minimem f.

(e) **ano — ne** Graf, v němž mezi každými dvěma vrcholy existuje alespoň jedna cesta, je nutně lesem.

(f) **ano — ne** Existuje právě 80 homomorfismů z P_2 (cesta délky 2) do K_5 (úplný graf o 5 vrcholech).

Příklady:

1. (8 bodů) Určete objem tělesa daného podmínkami:

$$x, y, z \geq 0,\ x + y + z \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 2.$$

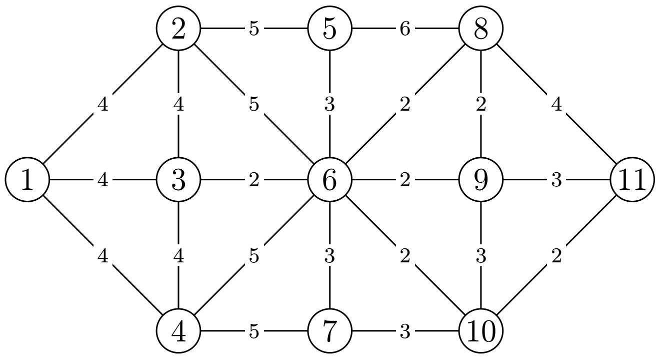
2. (6 bodů) Nalezněte **maximální** kostru grafu na obrázku, uveďte název a stručný popis algoritmu, který používáte. Dále vhodným způsobem zapište jednotlivé prováděné akce.

3. (6 bodů) Na kuželosečce o rovnici

$$x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$$

najděte všechny body, v nichž je normála rovnoběžná s osou y. Pro každý nalezený bod zapište obecnou rovnici tečny k dané křivce v tomto bodě.

4. (4 body) Udejte příklad grafu, který obsahuje právě 8 artikulací a 5 mostů.



Obr. 1: Obrázek k příkladu na hledání kostry.

Návod k řešení:

Teorie: a) NE – negativně definitivní je, pokud se znaménka minoru střídají, počínaje záporným; b) NE – pro existenci limitu není vůbec třeba, aby daný bod patřil do definičního oboru; c) ANO; d) ANO; e) NE – premisa implikuje souvislost, aby šlo o les, musel by graf být navíc stromem; f) ANO – $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$.

1. Viz též př. 107 z demonstračních cvičení. S využitím transformace do válcových souřadnic (nezapomenout na jakobián!) vyjde

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \pi - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

2. Více možností, maximální kostra má 10 hran a součet ohodnocení 44.

3. Příklad na implicitně definované funkce (šel ale řešit i s využitím středoškolských znalostí o kuželosečkách). Normála funkce implicitně definované pomocí $F(x, y) = 0$ v bodě a se snadno spočítá jako hodnota diferenciálu $\mathrm{d}F(a)$. V našem případě $\mathrm{d}F(a) = (F'_x(a), F'_y(a)) = (2x_0 - 2, 6y_0 + 6)$, kde x_0, y_0 jsou souřadnice bodu a. Protože má být normála rovnoběžná s osou y, musí být $2x_0 - 2 = 0$ (na y_0 z toho neplynou žádné podmínky, to dopočítáme tak, aby bod a ležel na dané kuželosečce). Hledané body jsou $[1, -3], [1, 1]$, v nichž jsou zřejmě tečnami (kolmými na normálu) přímky $y = -3$, resp. $y = 1$.

4. Mnoho možností.