2. Slabý zákon velkých čísel a centrální limitní věta

2.1. Motivace ke slabému zákonu velkých čísel a centrální limitní větě

2.2. Definice: Tři typy konvergence náhodné posloupnosti k náhodné veličině

2.3. Věta: Ověření konvergence podle pravděpodobnosti ke konstantě

2.4. Věta: Čebyševova věta

2.5. Důsledek: Bernoulliova věta

2.6. Příklad: Při výstupní kontrole bylo zjištěno, že mezi 3000 kontrolovanými výrobky je 12 zmetků. Jaká je pravděpodobnost, že relativní četnost výskytu zmetku se od pravděpodobnosti výskytu zmetku neliší o více než 0,01?

Řešení: Y_{3000} – počet zmetků mezi kontrolovanými výrobky, $Y_{3000} \sim Bi(3000,\ \vartheta)$, $\vartheta \approx \frac{12}{3000}$.

Podle Bernoulliovy věty dostáváme: $\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \vartheta\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n\varepsilon^2}$. V našem případě

$\varepsilon = 0{,}01$, $n = 3000$, $\vartheta \approx \frac{12}{3000}$, tedy $P\left(\left|\frac{Y_{3000}}{3000} - \vartheta\right| < 0{,}01\right) \ge 1 - \frac{\frac{12}{3000} \cdot \frac{2988}{3000}}{3000 \cdot 0{,}01^2} = 0{,}987.$

2.7. Věta: Sverdrupova věta

2.8. Věta: Lindebergova – Lévyova CLV

2.9. Poznámka: Generování realizací náhodné veličiny $X \sim N(0,1)$ – ilustrace pomocí systému STATISTICA

2.10. Důsledek: Moivreova – Laplaceova věta

2.11. Poznámka: Přibližný vzorec na základě M-L věty

2.12. Příklad: 100x nezávisle na sobě hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne aspoň 20x?

Řešení: Y_{100} – počet šestek ve 100 hodech, $Y_{100} \sim Bi(100,\ 1/6)$

Ověření podmínek dobré aproximace: $n\vartheta(1-\vartheta) = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{500}{36} = 13{,}\overline{8} > 9$

$\frac{1}{n+1} < \vartheta < \frac{n}{n+1} : \frac{1}{101} < \frac{1}{6} < \frac{100}{101}$ - v pořádku

$P(Y_{100} \ge 20) = 1 - P(Y_{100} < 20) = 1 - P(Y_{100} \le 19) =$

$= 1 - P\left(\frac{Y_{100} - \frac{100}{6}}{\sqrt{\frac{500}{36}}} \le \frac{19 - \frac{100}{6}}{\sqrt{\frac{500}{36}}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}626) = 1 - 0{,}73565 = 0{,}264$

2.13. Věta: Poissonova věta

2.14. Poznámka: Přibližný vzorec na základě Poissonovy věty

2.15. Příklad: Během zkoušky spolehlivosti se přístroj porouchá s pravděpodobností 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že při zkoušení 100 přístrojů se jich porouchá právě 5?
Řešení: Y_{100} – počet porouchaných přístrojů při zkoušení 100 přístrojů, $Y_{100} \sim Bi(100, 0{,}05)$
Ověření podmínek dobré aproximace: n = 100 >30, $\vartheta = 0{,}05 < 0{,}1$ – v pořádku

$$P(Y_{100} = 5) \approx \frac{(100 \cdot 0{,}05)^5}{5!} e^{-100 \cdot 0{,}05} = \frac{5^5}{5!} e^{-5} = 0{,}1755$$

Přesný výpočet: $P(Y_{100} = 5) = \binom{100}{5} 0{,}05^5 0{,}95^{95} = 0{,}18$