4. Bodové a intervalové odhady parametrů a parametrických funkcí

4.1. Motivace

4.2. Definice: Definice parametrického prostoru a parametrické funkce

4.3. Definice: Definice nestranného odhadu, lepšího nestranného odhadu, posloupnosti asymptoticky nestranných odhadů a konzistentních odhadů

4.4. Důsledek: Vztah mezi jednotlivými typy bodových odhadů

4.5. Věta: Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z jednoho náhodného výběru.

4.6. Poznámka: Výběrová směrodatná odchylka S není nestranným odhadem směrodatné odchylky σ.

4.7. Věta: Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z $r \geq 2$ nezávislých náhodných výběrů.

4.8. Věta: Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z jednoho dvourozměrného náhodného výběru.

4.9. Definice: Definice intervalu spolehlivosti.

4.10. Poznámka: Postup při konstrukci intervalu spolehlivosti.

4.11. Příklad: Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu,\sigma^2)$, kde $n \geq 2$ a rozptyl σ^2 známe. Sestrojte 100(1-α)% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ.

Řešení: V tomto případě parametrická funkce $h(\vartheta) = \mu$. Nestranným odhadem střední hodnoty je výběrový průměr (viz 1.3.(a)) $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Protože M je lineární kombinací normálně rozložených náhodných veličin, bude mít také normální rozložení se střední hodnotou $E(M) = \mu$ a rozptylem $D(M) = \frac{\sigma^2}{n}$. Pivotovou statistikou W bude standardizovaná náhodná veličina $U = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$. Kvantil $w_{\alpha/2} = u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$, $w_{1-\alpha/2} = u_{1-\alpha/2}$.

$\forall \vartheta \in \Xi : 1 - \alpha \leq P(-u_{1-\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}) =$

$$P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) = P\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} < \mu < M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right).$$

Meze 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 tedy jsou:

$D = M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$, $H = M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$.

Při konstrukci jednostranných intervalů spolehlivosti se riziko nepůlí, tedy 100(1-α)% levostranný interval spolehlivosti pro μ je $\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty\right)$ a pravostranný je $\left(-\infty, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}\right)$.

Dosadíme-li do vzorců pro dolní a horní mez číselnou realizaci m výběrového průměru M, dostaneme 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti.

4.12. Příklad: 10 krát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru $X_1, ..., X_{10}$ z rozložení N(μ, 0,04), kde parametr μ neznáme. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro μ, a to

a) oboustranný,
b) levostranný,
c) pravostranný.

Řešení: $m = 2{,}06$, $\sigma^2 = 0{,}04$, $\sigma = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}05$, $u_{0,975} = 1{,}96$, $u_{0,95} = 1{,}64$.

ad a) $d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} 1{,}96 = 1{,}94$

$h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} 1{,}96 = 2{,}18$

$1{,}94 < \mu < 2{,}18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b) $d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} 1{,}64 = 1{,}96$

$1{,}96 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) $h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} 1{,}64 = 2{,}16$

$\mu < 2{,}16$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

4.13. Poznámka o šířce intervalu spolehlivosti

4.14. Příklad: (stanovení minimálního rozsahu výběru z normálního rozložení)
Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Jaký musí být minimální rozsah výběru n, aby šířka 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ nepřesáhla číslo Δ?

Řešení: Požadujeme, aby $\Delta \geq h - d = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} - (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$. Z této podmínky dostaneme, že $n \geq \frac{4\sigma^2 {u_{1-\alpha/2}}^2}{\Delta^2}$. Za rozsah výběru zvolíme nejmenší přirozené číslo vyhovující této podmínce.

Odvozený vzorec použijeme v této situaci: v příkladu 4.12. (a) se uživateli zdá 95% empirický interval spolehlivosti (1,94; 2,18) pro střední hodnotu μ příliš široký. Přál by si, aby šířka 95% empirického intervalu spolehlivosti nepřesáhla číslo 0,16. Dostáváme tedy $n \geq \frac{4\sigma^2 {u_{1-\alpha/2}}^2}{0{,}16^2} = \frac{4 \cdot 0{,}04 \cdot {u_{0,975}}^2}{0{,}16^2} = \frac{4 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}96^2}{0{,}16^2}$=24,01. Podmínku splňuje číslo 25.