Příklady na cvičení k 5. přednášce

Příklad 1.: Najděte odhad parametru λ Poissonova rozložení Po(λ)
a) metodou maximální věrohodnosti
b) metodou momentů.
Výsledek: V obou případech dostaneme výběrový průměr.

Příklad 2.: Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad parametru λ exponenciálního rozložení Ex(λ).

Výsledek: $\hat{\lambda}(X) = \frac{1}{M}$

Příklad 3.: Metodou momentů najděte odhad parametrů μ, σ^2 normálního rozložení N(μ, σ^2).

Výsledek: $\hat{\mu}(X) = M$, $\hat{\sigma}^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - M^2 = \ldots = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$

Příklad 4.: Jsou dány realizace 0,1,0,1,0 náhodného výběru rozsahu 5 z alternativního rozložení $A(\vartheta)$. Najděte věrohodnosti předpokladů $\vartheta = 0{,}3$ a $\vartheta = 0{,}5$.
Výsledek: Pro $\vartheta = 0{,}3$ máme $L(0{,}3) = 0{,}03087$ a pro $\vartheta = 0{,}5$ máme $L(0{,}5) = 0{,}03125$.

Příklad 5.: Metodou momentů najděte odhady parametrů κ, λ rozložení gamma $\Gamma(\kappa, \lambda)$.

Výsledek: $\hat{\lambda}(X) = \dfrac{M}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2}$, $\hat{\kappa}(X) = \dfrac{M^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2}$

Příklad 6.: 10 x nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru $X_1, \ldots, X_{10}$ z rozložení N(μ, 0,04). Nějaká teorie tvrdí, že $\mu = 1{,}95$. Proti nulové hypotéze H_0: $\mu = 1{,}95$ postavíme oboustrannou alternativu H_1: $\mu \neq 1{,}95$. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1
a) pomocí kritického oboru
b) pomocí intervalu spolehlivosti
c) pomocí p-hodnoty
Výsledek: m = 2,06, σ^2 = 0,04, n = 10, α = 0,05, c = 1,95
a) Testové kritérium se realizuje hodnotou 1,74. Ta nepatří do kritického oboru $(-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$, tedy H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
b) Protože 1,95 $\in$ (1,936; 2,184), H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
c) Jelikož p = 0,08186 > 0,05, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 7.: Uvažme data z 6. příkladu. Proti nulové hypotéze H_0: $\mu = 1{,}95$ postavíme levostrannou alternativu H_1: $\mu < 1{,}95$. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1
a) pomocí kritického oboru
b) pomocí intervalu spolehlivosti
c) pomocí p-hodnoty
Výsledek: m = 2,06, σ^2 = 0,04, n = 10, α = 0,05, c = 1,95
a) Testové kritérium se realizuje hodnotou 1,74. Ta nepatří do kritického oboru $(-\infty, -1{,}64\rangle$, tedy H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

b) Protože $1{,}95 \in (-\infty; 2{,}164)$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
c) Jelikož $p = 0{,}95907 > 0{,}05$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 8.: Uvažme data z 6. příkladu. Proti nulové hypotéze H_0: $\mu = 1{,}95$ postavíme pravostrannou alternativu H_1: $\mu > 1{,}95$. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1
a) pomocí kritického oboru
b) pomocí intervalu spolehlivosti
c) pomocí p-hodnoty
Výsledek: $m = 2{,}06$, $\sigma^2 = 0{,}04$, $n = 10$, $\alpha = 0{,}05$, $c = 1{,}95$
a) Testové kritérium se realizuje hodnotou 1,74. Ta patří do kritického oboru $\langle 1{,}64, \infty)$, tedy H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.
b) Protože $1{,}95 \notin (1{,}956; \infty)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.
c) Jelikož $p = 0{,}04093 \leq 0{,}05$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.