

MB101 – dobrovolné domácí úkoly

Geometrie v \mathbb{R}^2 , relace, zobrazení

1. Zrcadlete bod $[3, 1]$ podle osy procházející počátkem a bodem $[1, 1]$.
2. V rovině máme zadány body $A = [1, 4], B = [2, -1], C = [4, 1], D = [3, 3]$. Určete, které strany čtyřúhelníku určeného těmito body jsou viditelné z bodu $P = [7, 2]$.
3. Spočítejte obsah trojúhelníku vymezeného přímkami:

$$p : [0, 1] + t \cdot (1, 2) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$q : [2, \frac{3}{2}] + s \cdot (1, -\frac{3}{2}) \quad s \in \mathbb{R}$$

$$r : [1, -\frac{1}{2}] + z \cdot (-2, -\frac{1}{2}) \quad z \in \mathbb{R}$$

4. Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující relace na množině všech celých čísel \mathbb{Z} reflexivní, symetrické, tranzitivní či antisymetrické:
 - a) $a \sim b \Leftrightarrow a \neq b$
 - b) $a \sim b \Leftrightarrow a$ je sudé a b je liché
 - c) $a \sim b \Leftrightarrow |a| \leq b$
 - d) $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b \leq 0$
 - e) $a \sim b \Leftrightarrow (a \leq b \text{ a zároveň } a \cdot b \geq 0)$
 - f) $a \sim b \Leftrightarrow (a \leq b \text{ nebo } a \cdot b > 0)$
5. Na množině $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je definována relace \sim předpisem $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b > 0$. Ověřte, že se jedná o relaci ekvivalence (tj. že je daná relace R,S,T).
6. Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující relace na množině všech reálných čísel \mathbb{R} reflexivní, symetrické, tranzitivní či antisymetrické.

$$\text{a) } a \sim b \Leftrightarrow \sin(a) = \sin(b)$$

$$\text{b) } a \sim b \Leftrightarrow a = b + 1$$

$$\text{c) } a \sim b \Leftrightarrow a \leq b^2$$

$$\text{d) } a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b \leq 1$$

7. Dejte příklad bijektivního (tj. zároveň injektivního a surjektivního) zobrazení množiny \mathbb{N} do množiny \mathbb{Z} .
8. Rozhodněte a dokažte, zda je zobrazení f injektivní, surjektivní nebo bi-jektivní, jestliže:

- a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pokud } x \text{ je liché} \\ x - 1 & \text{pokud } x \text{ je sudé} \end{cases}$
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x-5}{12}$
- c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x-4}{2x}$
- d) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x$
- e) $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f(x) = \text{zbytek po dělení čísla } x \text{ číslem } 5$

0.0.1 Řešení

1. [1, 3] 2. Viditelné jsou všechny, kromě strany AB . 3. 7 4. Daná relace je (R, S, T, A) : a) S b) T, A (dobře si uvědomte, jakými výrokovými formulami je definována tranzitivnost a antisymetričnost) c) T d) S e) R, A f) R, T 6. a) R, S, T b) A c) ani jedno d) S 8. a) je bijektivní b) je bijektivní c) je injektivní d) je injektivní e) je surjektivní