

# MB101 – dobrovolné domácí úkoly

## Vl. čísla, vl. vektory, výpočet kolmé projekce

1. Pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru

$$V = \text{Span}\langle(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0), (1, 1, 2, 3), (0, 1, 0, 0)\rangle.$$

2. Vypočítejte kolmou projekci vektoru  $(3, 1)$  na prostor  $\text{Span}\langle(1, 0)\rangle$ .
3. Vypočítejte kolmou projekci vektoru  $(1, -1, 2, 1)$  na prostor

$$V = \text{Span}\langle(1, 2, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, -1, 1, 0)\rangle.$$

4. Nalezněte vlastní čísla matice  $A$ , určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a najděte nějaké báze příslušných vlastních prostorů. Zjistěte, zda je matice  $A$  podobná nějaké diagonální matici. Pokud ano, určete matici  $P$  takovou, že  $A = PDP^{-1}$ , kde  $D$  je ona diagonální matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Nalezněte vlastní čísla matice  $A$ , určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a najděte nějaké báze příslušných vlastních prostorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 0.0.1 Výsledky

1.  $[\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{12}}(-3, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -2, 1)]$  2.  $(3, 0)$  3.  $(1, -1, 2, 0)$
4. Matice má vlastní číslo 1 algebraické a geometrické násobnosti 1 a vlastní číslo 2 algebraické a geometrické násobnosti 2. Platí například:  $Eigen(1) = \text{Span}\langle(1, 1, 1)\rangle$  a  $Eigen(2) = \text{Span}\langle(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\rangle$ . Pokud za matici  $P$  vezmeme například matici tvořenou báзовými vektory těchto vlastních prostorů (v uvedeném pořadí), pak získáváme diagonální matici  $D$ , která má na diagonále hodnoty 1, 2, 2 (v tomto pořadí).
5. Matice má jediné vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 4 a geometrické násobnosti 2.  $Eigen(2) = \text{Span}\langle(2, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\rangle$ .