

## 3. SKALÁRNÍ SOUČIN

## Teorie

**3.1. Definice.** Necht'  $V$  je vektorový prostor nad polem  $K$ . Pak *skalární součin* na  $V$  je bilineární symetrická forma, tj. zobrazení  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$  takové, že  $\langle x, x \rangle > 0$  pro  $x \in V, x \neq o$ . (To znamená, že příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.) Reálný vektorový prostor se skalárním součinem nazýváme *euklidovský prostor*.

**3.2. Definice.** Necht'  $R^n$  je vektorový prostor. Definujeme skalární součin pro  $x, y \in R^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  jako  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Takto definovaný skalární součin nazýváme *standardní skalární součin*. Euklidovský vektorový prostor  $R^n$  se standardním skalárním součinem budeme značit  $E_n$ .

**3.3. Definice.** Velikost (*norma*) vektoru  $v$  v euklidovském prostoru  $V$  je číslo  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

**3.4. Věta.** (*Cauchyova-Schwartzova nerovnost*) Pro každé dva vektory  $u, v$  v euklidovském prostoru  $V$  platí

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

.

**3.5. Definice.** Necht'  $V$  je euklidovský prostor,  $u, v \in V$ . Úhel, který vektory  $u$  a  $v$  svírají je číslo  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$  takové, že

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

.

**3.6. Definice.** Dva vektory  $u, v \in V$ , kde  $V$  je euklidovský prostor, nazveme *kolmé (ortogonální)*, pokud  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Dva vektory  $u, v \in V$ , nazveme *ortonormální*, pokud jsou ortogonální (tj.  $\langle u, v \rangle = 0$ ) a pokud jejich velikost je rovna jedné (tj.  $\|u\| = 1 \wedge \|v\| = 1$ ).

**3.7. Věta.** Necht'  $V$  je euklidovský prostor a  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  jsou po dvou ortogonální vektory různé od nulového. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

**3.8. Definice.** Bázi tvořenou ortogonálními vektory nazveme *ortogonální báze*. Bázi tvořenou ortonormálními vektory nazveme *ortonormální báze*.

**3.9. Věta.** Necht'  $V$  je euklidovský prostor a  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  libovolné vektory. Pak existují ortogonální vektory  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ , které generují tentýž prostor jako vektory  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , to znamená

$$[u_1, u_2, \dots, u_k] = [v_1, v_2, \dots, v_k].$$

Algoritmus, s jehož pomocí lze nalézt vektory  $v_1, v_2, \dots, v_k$  se nazývá *Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces* a je popsán v úloze 1.

**3.10. Definice.** Řekneme, že množiny  $A, B \subseteq V$  jsou *ortogonální množiny* (ozn.  $A \perp B$ ) jestliže

$$\forall u \in A, \forall v \in B : \langle u, v \rangle = 0$$

.

**3.11. Definice.** *Ortogonální doplněk množiny*  $A$  v euklidovském vektorovém prostoru  $V$  nazveme množinu

$$A^\perp = \{u \in V : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in A\}$$

.

**3.12. Definice.** Nechť  $V$  je euklidovský prostor a  $U \subseteq V$  je vektorový podprostor ve  $V$ . *Kolmá projekce vektoru*  $v \in V$  do  $U$  je vektor  $Pv \in U$  takový, že  $v - Pv \perp U$ .

**3.13. Věta.** Nechť  $V$  je euklidovský prostor a  $U \subset V$  je podprostor. Potom  $U \oplus U^\perp = V$ .

## Řešené příklady

**Úloha 1:** Použijte Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces na bázi  $\alpha : u_1 = (2, 0, -1)^T, u_2 = (-1, 1, 1)^T, u_3 = (1, 1, 1)^T$  vektorového prostoru  $E_3$ .

**Řešení:** Budeme hledat ortogonální bázi  $\beta : [v_1, v_2, v_3]$

1) Za  $v_1$  zvolíme libovolně jeden ze tří vektorů původní báze  $\alpha$ , např.

$$v_1 = u_1$$

a tedy

$$v_1 = (2, 0, -1)^T$$

2) Hledáme druhý vektor báze  $v_2$  ve tvaru

$$v_2 = u_2 + p_1 v_1$$

tuto rovnost skalárně vynásobíme vektorem  $v_1$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, u_2 \rangle + p_1 \langle v_1, v_1 \rangle$$

požadujeme, aby vektory  $v_1, v_2$  byly kolmé, proto skalární součin  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ ; zbylé skalární součiny můžeme už lehce spočítat  $\langle v_1, u_2 \rangle = -3, \langle v_1, v_1 \rangle = 5$ , pak

$$0 = -3 + 5p_1 \quad \text{z toho plyne} \quad p_1 = \frac{3}{5}$$

a tedy

$$v_2 = (-1, 1, 1)^T + \frac{3}{5}(2, 0, -1)^T$$

$$v_2^0 = \left(\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)^T$$

můžeme do báze zvolit libovolný násobek tohoto vektoru, pro snadnější počítání tedy volme

$$v_2 = (1, 5, 2)^T$$

3) Nyní zbývá najít ještě třetí vektor báze  $v_3$ , který musí být kolmý k oběma předchozím vektorům  $v_1$  a  $v_2$ ; předpokládejme jej ve tvaru

$$v_3 = u_3 + q_1 v_1 + q_2 v_2$$

tuto rovnost nejdříve skalárně vynásobíme vektorem  $v_1$  a pak vektorem  $v_2$ , čímž dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých  $q_1$  a  $q_2$

$$\langle v_3, v_1 \rangle = \langle u_3, v_1 \rangle + q_1 \langle v_1, v_1 \rangle + q_2 \langle v_2, v_1 \rangle$$

$$\langle v_3, v_2 \rangle = \langle u_3, v_2 \rangle + q_1 \langle v_1, v_2 \rangle + q_2 \langle v_2, v_2 \rangle$$

z požadavku vzájemné ortogonalitě všech vektorů báze  $\beta$  plyne

$$0 = 1 + 5q_1 \quad \text{z toho plyne} \quad q_1 = -\frac{1}{5}$$

$$0 = 8 + 30q_2 \quad \text{z toho plyne} \quad q_2 = -\frac{4}{15}$$

tedy

$$v_3^0 = (1, 1, 1)^T - \frac{1}{5}(2, 0, -1)^T - \frac{4}{15}(1, 5, 2)^T = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$$

opět můžeme do báze  $\beta$  zvolit libovolný násobek tohoto vektoru, např.

$$v_3 = (1, -1, 2)^T$$

a tedy  $\beta = [(2, 0, -1)^T, (1, 5, 2)^T, (1, -1, 2)^T]$

**Úloha 2:** Necht'  $W = [(1, -1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 1, 0, 1)^T, (1, 1, 0, -1, 1)^T]$  je podprostor v  $E_5$ . Najděte ortogonální doplněk  $W^\perp$  tohoto podprostoru.

**Řešení:** Podle definice 3.10. je ortogonální doplněk podprostoru množina všech vektorů kolmých ke všem vektorům zadaného podprostoru. Rozmyslíme-li si tuto definici, je zřejmé, že stačí hledat množinu všech vektorů kolmých k vektorům báze podprostoru  $W$ . Označíme

si vektory báze postupně  $v_1, v_2, v_3$  a uvažujeme libovolný vektor  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$  takový, že  $x \in W^\perp$ , pak platí:

$$x \in W^\perp \quad \text{právě když} \quad x \perp v_1 \wedge x \perp v_2 \wedge x \perp v_3$$

a tedy

$$x \in W^\perp \quad \text{právě když} \quad \langle x, v_1 \rangle = 0; \langle x, v_2 \rangle = 0; \langle x, v_3 \rangle = 0$$

$$\begin{array}{r} \text{z toho plyne} \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \end{array}$$

dále řešíme tuto soustavu rovnic pro nalezení tvaru vektoru  $x$  úpravou na schodovitý tvar pomocí elementárních řádkových úprav

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

zavedeme parametry  $a, b$  a dostáváme:

$$x_5 = b; x_4 = a; x_3 = -a - b; x_2 = -b; x_1 = a$$

podprostor vektorů  $x$ , což je podprostor vektorů kolmých na vektory báze podprostoru  $W$ , a tedy ortogonální doplněk podprostoru  $W$ , je generován vektory, které dostáváme nezávislou volbou parametrů  $a$  a  $b$

$$W^\perp = [(1, 0, -1, 1, 0)^T, (0, -1, -1, 0, 1)^T]$$

**Úloha 3:** Najděte kolmý průmět vektoru  $v$  do podprostoru  $W = [w_1, w_2]$  v  $E_4$ , kde  $w_1 = (1, -1, -1, 2)^T$ ,  $w_2 = (3, 1, 0, 1)^T$ ,  $v = (-2, 2, 2, 5)^T$ .

**Řešení:** Kolmý průmět  $Pv$  vektoru  $v$  předpokládáme ve tvaru lineární kombinace vektorů báze podprostoru  $W$ , do kterého promítáme

$$Pv = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

Aby šlo o kolmou projekci, musí být podle definice 3.11. vektor  $v - Pv$  kolmý na podprostor  $W$ , a tedy musí platit:

$$\begin{array}{l} v - Pv \perp w_1 \\ v - Pv \perp w_2 \end{array}$$

z toho plyne

$$\begin{aligned} \langle v, w_1 \rangle - a_1 \langle w_1, w_1 \rangle - a_2 \langle w_2, w_1 \rangle &= 0 \\ \langle v, w_2 \rangle - a_1 \langle w_2, w_1 \rangle - a_2 \langle w_2, w_2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

po vyčíslení skalárních součinů dostáváme:

$$\begin{aligned} 8 - 7a_1 - 6a_2 &= 0 \\ 1 - 6a_1 - 11a_2 &= 0 \end{aligned}$$

řešením této soustavy rovnic je  $a_1 = 2$  a  $a_2 = -1$ , tedy

$$Pv = 2(1, 1, -1, 2) - (3, 1, 0, 1) = (-1, 1, -2, 3)$$

## Cvičení

1. Zjistěte zda je zobrazení  $g : R^2 \times R^2 \rightarrow R$  skalární součin

(a)  $g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

(b)  $g(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2$

(c)  $g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

2. Zjistěte, zda je zobrazení  $g : R^3 \times R^3 \rightarrow R$  skalární součin

(a)  $g(u, v) = 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$

(b)  $g(u, v) = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_3$

(c)  $g(u, v) = u_1v_1 + 2u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_1 + 2u_3v_3$

(d)  $g(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 - u_2v_3 - u_3v_2 + 3u_3v_3$

(e)  $g(u, v) = 3u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

3. Ve vektorovém prostoru  $R_2[x]$  je pro libovolné dva polynomy  $f, g$  definováno reálné číslo  $\langle f, g \rangle$ . Rozhodněte, zda je takto definován skalární součin.

(a)  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$

(b)  $\langle f, g \rangle = 1$

4. Ve vektorovém prostoru  $Mat_{22}(R)$  je pro libovolné vektory  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$  definováno reálné číslo  $\langle A, B \rangle$ . Rozhodněte, zda je takto definován skalární součin.

(a)  $\langle A, B \rangle = \det(A \cdot B)$

(b)  $\langle A, B \rangle = \det(A + B)$

- (c)  $\langle A, B \rangle = a_1 b_1 + a_4 b_4$   
 (d)  $\langle A, B \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$
5. Zkuste na  $R^2$  najít takový skalární součin, aby vektory  $u$  a  $v$  byly na sebe kolmé.
- (a)  $u = (1, 2)^T, v = (2, 3)^T$   
 (b)  $u = (-5, 2)^T, v = (10, -4)^T$
6. Najděte ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory  $(3, 2, -4, 6)^T, (8, 1, -2, -16)^T, (5, 12, -14, 5)^T, (11, 3, 4, -7)^T$  v euklidovském prostoru  $E_4$ .
7. Určete ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory  $(1, 0, 4, -1)^T, (1, -4, 0, 1)^T, (-4, 1, 1, 0)^T$  a jeho ortogonálního doplňku v euklidovském prostoru  $E_4$ .
8. Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem sestrojte ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory  $(1, 1, -1, -1)^T, (1, -1, 1, 1)^T, (-1, -2, 0, 1)^T$  v euklidovském prostoru  $E_4$ .
9. V euklidovském prostoru  $V$  nalezněte ortogonální bázi podprostoru  $W$ , je-li:
- (a)  $V = E_4, W = [(1, 2, 2, -1)^T, (1, 1, -5, 3)^T, (3, 2, 8, -7)^T]$   
 (b)  $V = E_4, W = [(1, 0, 1, 0)^T, (0, 1, 0, -7)^T, (3, -2, 3, 14)^T]$   
 (c)  $V = E_5, W = [(1, 2, 0, 1, 2)^T, (1, 1, 3, 0, 1)^T, (1, 3, -3, 2, 3)^T, (1, -1, 9, -2, -1)^T]$   
 (d)  $V = E_5, W = [(1, -1, 0, 1, 1)^T, (1, -1, 1, 0, -1)^T, (1, -2, -2, 0, 0)^T, (1, -4, 1, 3, 4)^T]$
10. V euklidovském prostoru  $E_4$  jsou dány vektory  $u, v$ . Ukažte, že tyto vektory jsou ortogonální a doplňte je na ortogonální bázi celého prostoru. Přitom:
- (a)  $u = (1, -2, 2, 1)^T, v = (1, 3, 2, 1)^T$   
 (b)  $u = (2, 3, -3, -4)^T, v = (-1, 3, -3, 4)^T$   
 (c)  $u = (1, 7, 7, 1)^T, v = (-1, 7, -7, 1)^T$
11. Najděte ortogonální bázi vektorového prostoru  $R_3[x]$  se skalárním součinem definovaným  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ . Najděte matici přechodu od nalezené báze  $\alpha$  do standardní báze  $[1, x, x^2, x^3]$ .
12. V euklidovském prostoru  $E_5$  je dán podprostor  $W$ . Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku  $W^\perp$ , je-li:
- (a)  $W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t); r, s, t \in R\}$   
 (b)  $W = [(1, -1, 2, 1, -3)^T, (2, 1, -1, -1, 2)^T, (1, -7, 12, 7, -19)^T, (1, 5, -8, -5, 13)^T]$
13. V euklidovském prostoru  $E_4$  nalezněte ortonormální bázi podprostoru vektorů, které jsou ortogonální k vektorům  $u = (1, 1, 1, 1)^T, v = (1, -1, -1, 1)^T, w = (2, 1, 1, 3)^T$ .

14. Určete všechny hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$ , pro které je zadaný vektor  $u$  z euklidovského prostoru  $V$  normovaný. Přitom:
- (a)  $V = E_5$ ,  $u = (a + 1, 0, a + 2, 0, a + 1)^T$
  - (b)  $V = R_2[x]$ , se skalárním součinem  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ,  $u = 3x^2 + a$
  - (c)  $V = R_2[x]$ , se skalárním součinem  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ ,  $u = 3x^2 + a$
15. Najděte ortogonální doplněk podprostoru  $P$  generovaného vektory  $(-1, 2, 0, 1)^T$ ,  $(3, 1, -2, 4)^T$ ,  $(-4, 1, 2, -4)^T$  v  $E_4$ .
16. V euklidovském prostoru  $E_4$  jsou dány podprostory  $W = [u_1, u_2, u_3]$  a  $S = [v]$ , kde  $u_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ ,  $u_2 = (-2, 6, 0, 8)^T$ ,  $u_3 = (-3, 1, -2, 2)^T$ ,  $v = (1, a, 3, b)^T$ .
- (a) Nalezněte ortogonální bázi  $W$ .
  - (b) Určete hodnoty  $a, b$  tak, aby podprostory  $W, S$  byly kolmé.
17. Najděte ortogonální průmět vektoru  $(1, 2, 3)^T$  do podprostoru generovaného vektory  $(-1, 1, 1)^T$ ,  $(1, 1, 1)^T$  v  $E_3$ .
18. Nechť je  $L = [u, v, w]$  podprostor v  $E_4$ . Najděte kolmý průmět vektoru  $z$  do  $L^\perp$ .
- (a)  $z = (4, 2, -5, 3)^T$ ,  $u = (5, 1, 3, 3)^T$ ,  $v = (3, -1, -3, 5)^T$ ,  $w = (3, -1, 5, -3)^T$
  - (b)  $z = (2, 5, 2, -2)^T$ ,  $u = (1, 1, 2, 8)^T$ ,  $v = (0, 1, 1, 3)^T$ ,  $w = (1, -2, 1, 1)^T$
19. V euklidovském prostoru  $V$  najděte ortogonální projekci vektoru  $u$  do podprostoru  $W$ , je-li:
- (a)  $V = E_4$ ,  $u = (-2, 2, 2, 5)^T$ ,  $W = [(1, 1, -1, 2)^T, (3, 1, 0, 1)^T, (2, 0, 1, -1)^T]$
  - (b)  $V = E_4$ ,  $u = (2, 7, -3, -6)^T$ ,  $W = \{(r + s, r + s, -r - 3s, 2r + 3s); r, s \in \mathbb{R}\}$
  - (c)  $V = E_4$ ,  $u = (1, 2, 3, 4)^T$ ,  $W = [(0, 1, 0, 1)^T]$
  - (d)  $V = E_4$ ,  $u = (4, -1, -3, 4)^T$ ,  $W = [(1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 2, -1)^T, (1, 0, 0, 3)^T]$
20. Nechť  $u, v$  jsou vektory z euklidovského prostoru  $V$ . Dokažte, že platí nerovnost  $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$ .
21. Dokažte, že pro libovolných  $n$  reálných čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

(Návod: Použijte Cauchyovu-Schwartzovu nerovnost.)