Demonstrované cvičení - Matematika II

Petr Hasil

hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

Integrální počet

Příklad 9.1

Určete v jakém poměru dělí křivka $P : y^2 = 2x$ plochu kruhu

$$K : x^2 + y^2 = 8.$$

Řešení

$$(\pi + 2/3) : (3\pi - 2/3).$$

Příklad 9.1

Určete v jakém poměru dělí křivka $P : y^2 = 2x$ plochu kruhu

$$K : x^2 + y^2 = 8.$$

Řešení

$$(\pi + 2/3) : (3\pi - 2/3).$$

Příklad 9.2

Určete délku jednoho oblouku cykloidy

$$x(t) = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi].$$

Řešení

$$8r.$$

Příklad 9.2

Určete délku jednoho oblouku cykloidy

$$x(t) = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi].$$

Řešení

$$8r.$$

Příklad 9.3

Vypočtěte délku řetězovky

$$f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$$

na intervalu $[-1, 1]$.

Řešení

$$a(e^{1/a} - e^{-1/a}).$$

Příklad 9.3

Vypočtěte délku řetězovky

$$f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$$

na intervalu $[-1, 1]$.

Řešení

$$a(e^{1/a} - e^{-1/a}).$$

Příklad 9.4

Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet plochy elipsy s poloosami a, b. (Jak to dopadne pro kruh?)

Řešení

$$S_E = \pi ab, \qquad S_K = \pi r^2.$$

Příklad 9.4

Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet plochy elipsy s poloosami a, b. (Jak to dopadne pro kruh?)

Řešení

$$S_E = \pi ab, \qquad S_K = \pi r^2.$$

Příklad 9.5

Vypočtěte objem komolého kužele s poloměrem podstav r_1, r_2 a výškou v. Jaký je potom objem "nekomolého" kužele?

Pro lepší pochopení – výpočet objemu.

Řešení

$$V_{KK} = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2), \qquad V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

Příklad 9.5

Vypočtěte objem komolého kužele s poloměrem podstav r_1, r_2 a výškou v. Jaký je potom objem "nekomolého" kužele?

Pro lepší pochopení – výpočet objemu.

Řešení

$$V_{KK} = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2), \qquad V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

Příklad 9.5

Vypočtěte objem komolého kužele s poloměrem podstav r_1, r_2 a výškou v. Jaký je potom objem "nekomolého" kužele?

Pro lepší pochopení – výpočet objemu.

Řešení

$$V_{KK} = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2), \qquad V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

Příklad 9.6

Určete následující integrály:

(i)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

(iii)

$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x,$$

(iv)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

Řešení

$$(i)\frac{\pi}{2}, \quad (ii)\infty(diverguje), \quad (iii)neexistuje(osciluje), \quad (iv)\pi.$$

Příklad 9.6

Určete následující integrály:

(i)
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

(iii)
$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x,$$

(iv)
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

Řešení

$$(i)\frac{\pi}{2},\quad (ii)\infty(diverguje),\quad (iii)neexistuje(osciluje),\quad (iv)\pi.$$

Příklad 9.7

Spočtěte:

(i)

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{x^2+2}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Obrázky: (i), (ii).

Řešení

$$(i) 2/\,e, \qquad (ii) \infty.$$

Příklad 9.7

Spočtěte:

(i)

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2+2}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Obrázky: (i), (ii).

Řešení

$$(i)\,2/\,e, \qquad (ii)\,\infty.$$

Příklad 9.7

Spočtěte:

(i)

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{x^2+2}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Obrázky: (i), (ii).

Řešení

$$(i) 2/e, \qquad (ii) \infty.$$

Příklad 9.8

Vyřešte:

(a) Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, na intervalu $[2, \infty)$.

(b) Určete obsah plochy ohraničené na intervalu $[2, \infty)$ grafy funkcí f a g, kde

$$f(x) = (x+1)\frac{x^2-x+1}{x^2+x-2},$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2+x-2}.$$

Obrázky: (a), (b).

Řešení

$$(a, b)\frac{2}{3}\ln 2.$$

Příklad 9.8

Vyřešte:

(a) Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, na intervalu $[2, \infty)$.

(b) Určete obsah plochy ohraničené na intervalu $[2, \infty)$ grafy funkcí f a g, kde

$$f(x) = (x+1)\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2},$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}.$$

Obrázky: (a), (b).

Řešení

$$(a, b)\frac{2}{3}\ln 2.$$

Příklad 9.8

Vyřešte:

(a) Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$, na intervalu $[2, \infty)$.

(b) Určete obsah plochy ohraničené na intervalu $[2, \infty)$ grafy funkcí f a g, kde

$$f(x) = (x+1)\frac{x^2-x+1}{x^2+x-2},$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2+x-2}.$$

Obrázky: (a), (b).

Řešení

$$(a, b)\frac{2}{3}\ln 2.$$