Matematika II – 2. přednáška
Spojité funkce, limity

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

24. 9. 2008

Obsah přednášky

1. Dokončení z minula – splajny, metoda nejmenších čtverců
   - Splajny
   - Aproximace
2. Reálná čísla
3. Limita posloupnosti a funkce
4. Spojitost

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/skript.pdf`).

Plán přednášky

1. Dokončení z minula – splajny, metoda nejmenších čtverců
   - Splajny
   - Aproximace
2. Reálná čísla
3. Limita posloupnosti a funkce
4. Spojitost

Splajny

I u polynomiálních interpolací s derivacemi pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Navíc přibývá problém spojený s odhadem derivací pokud je zadána pouze množina hodnot. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky – **splajny**.

Splajny

I u polynomiálních interpolací s derivacemi pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Navíc přibývá problém spojený s odhadem derivací pokud je zadána pouze množina hodnot.
Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky – **splajny**.
Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků, které ale musíme umět rozumně navazovat.

Splajny

I u polynomiálních interpolací s derivacemi pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Navíc přibývá problém spojený s odhadem derivací pokud je zadána pouze množina hodnot.
Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky – **splajny**.
Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků, které ale musíme umět rozumně navazovat.
Nejjednodušší je propojení vždy dvou sousedních bodů lineárním polynomem. Tak se nejčastěji zobrazují data. Z pohledu derivací to znamená, že budou na jednotlivých úsecích konstantní a pak se skokem změní.

O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. Tento polynom pak můžeme použít pro všechny hodnoty nezávislé proměnné mezi krajními hodnotami $x_0 < x_1$. Hovoříme o **intervalu** $[x_0, x_1]$. Takové polynomiální příblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že derivace na sebe budou navazovat.

O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. Tento polynom pak můžeme použít pro všechny hodnoty nezávislé proměnné mezi krajními hodnotami $x_0 < x_1$. Hovoříme o **intervalu** $[x_0, x_1]$. Takové polynomiální příblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že derivace na sebe budou navazovat.

V praxi ale není pouhé navazování první derivace dostatečné (viz třeba koleje tramvají) a navíc při naměřených datech nemíváme hodnoty derivací k dispozici. Přímo se proto vnucuje pokus využívat pouze zadané hodnoty ve dvou sousedních bodech, ale požadovat zároveň rovnost prvních i druhých derivací u sousedních kousků polynomů třetího stupně!

Kubický interpolační splajn

Definition

Nechť $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ jsou reálné (nebo racionální) hodnoty, ve kterých jsou zadány požadované hodnoty $y_0, \dots, y_n$. **Kubickým interpolačním splajnem** pro toto zadání je funkce $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebot $S : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$), která splňuje následující podmínky:

- zúžení S na interval $[x_{i-1}, x_i]$ je polynom S_i třetího stupně, $i = 1, \dots, n$
- $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a $S_i(x_i) = y_i$ pro všechny $i = 1, \dots n$,
- $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n-1$,
- $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n-1$.

Kubický splajn pro $n+1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n+(n-1)+(n-1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro první derivace v krajních bodech (tzv. **úplný splajn**) nebo jsou druhé derivace zadány jako nula (tzv. **přirozený splajn**).

Kubický splajn pro $n+1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n+(n-1)+(n-1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro první derivace v krajních bodech (tzv. **úplný splajn**) nebo jsou druhé derivace zadány jako nula (tzv. **přirozený splajn**). Výpočet celého splajnu už není bohužel tak jednoduchý jako u nezávislých výpočtů Hermiteových polynomů třetího stupně, protože data se prolínají vždy mezi sousedními intervaly. Výpočty splajnů jsou však základem takřka všech grafických balíčků pracujících s křivkami, proto je pochopení principu jejich fungování velmi důležité. Ti z vás, kteří tíhnout k počítačové grafice, se s tímto pojmem určitě ještě setkají.

Aproximace je narozdíl od interpolace postup, který bere ohled na to, že pracujeme s potenciálně nepřesnými vstupními daty, a nesnaží se proto *trefit* přesně do zadaných bodů, ale výstupem je funkce, která má ze zadané třídy funkcí (ve vhodném smyslu) nejmenší vzdálenost od zadaných bodů. Častým případem je rovněž situace, kdy řešíme tzv. **přeurčenou soustavu rovnic**, tj. máme více rovnic než neznámých (např. z výše uvedených důvodů nechceme aproximovat $n+1$ daných bodů hodnotami polynomu stupně n ale stupně nižšího).

Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je založena na tom, že hledáme funkci z dané množiny (např. lineární polynomy, kvadratické polynomy, polynomy stupně nejvýše n, ale i mnohé jiné funkce v závislosti na zvoleném modelu), jejíž hodnoty v daných bodech $x_1, \ldots, x_n$ mají nejmenší **součet druhých mocnin vzdáleností** od zadaných hodnot $y_1, \ldots, y_n$.

Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je založena na tom, že hledáme funkci z dané množiny (např. lineární polynomy, kvadratické polynomy, polynomy stupně nejvýše n, ale i mnohé jiné funkce v závislosti na zvoleném modelu), jejíž hodnoty v daných bodech $x_1, \dots, x_n$ mají nejmenší **součet druhých mocnin vzdáleností** od zadaných hodnot $y_1, \dots, y_n$.
Tato metoda se velmi často objevuje ve zejména ve statistice (regresní analýza).
Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.
S pomocí odhadů nebo základních metod diferenciálního počtu (toho budeme schopni za několik týdnů) lze snadno odvodit následující tvrzení.

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech $x_1, \dots, x_n$ od hodnot y_i funkce splňující

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Plán přednášky

1. Dokončení z minula – splajny, metoda nejmenších čtverců
   - Splajny
   - Aproximace
2. Reálná čísla
3. Limita posloupnosti a funkce
4. Spojitost

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.
Připoměňme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislostí uspořádání a ostatních relací. Dělící čáry v tabulce naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, $\mathbb{R}$ je pole, množina $\mathbb{R}$ spolu s operacemi $+$, $\cdot$ a s relací uspořádání je tzv. **uspořádané pole** a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že $\mathbb{R}$ je *dostatečně husté*, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních.

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.

Připoměňme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislostí uspořádání a ostatních relací. Dělící čáry v tabulce naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, $\mathbb{R}$ je pole, množina $\mathbb{R}$ spolu s operacemi $+$, $\cdot$ a s relací uspořádání je tzv. **uspořádané pole** a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že $\mathbb{R}$ je *dostatečně husté*, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních.

Zároveň si uvědomujme, které z axiomů platí pro $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{C}$.

(R1)	$(a+b)+c=a+(b+c)$, pro všechny $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$
(R2)	$a+b=b+a$, pro všechny $a,\ b\in\mathbb{R}$
(R3)	existuje $0\in\mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a\in\mathbb{R}$ platí $a+0=a$
(R4)	pro všechny $a\in\mathbb{R}$ existuje opačný prvek $(-a)\in\mathbb{R}$ takový, že platí $a+(-a)=0$
(R5)	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$, pro všechny $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$
(R6)	$a\cdot b=b\cdot a$ pro všechny $a,\ b\in\mathbb{R}$
(R7)	existuje $1\in\mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a\in\mathbb{R}$ platí $1\cdot a=a$
(R8)	pro každý $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ existuje inverzní prvek $a^{-1}\in\mathbb{R}$ takový, že platí $a\cdot a^{-1}=1$
(R9)	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, pro všechny $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$
(R10)	relace $\leq$ je úplné uspořádání, tj. reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná relace na $\mathbb{R}$
(R11)	pro $a,b,c\in\mathbb{R}$ platí, že z $a\leq b$ vyplývá $a+c\leq b+c$
(R12)	pro všechny $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b>0$, platí také $a\cdot b>0$
(R13)	každá neprázdná ohraničená množina $A\subset\mathbb{R}$ má supremum.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\underline{\text{horní závorou}} \text{ množiny } A, \text{ pokud } \forall x \in A: \ x \leq b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje dolní závora množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

horní závorou množiny A, pokud $\forall x \in A: \ x \leq b$,

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje dolní závora množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.
Řekneme, že množina A je shora ohraničená (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje zdola ohraničená (zdola omezená) množina A. Množina A je ohraničená (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

horní závorou množiny A, pokud $\forall x \in A: \; x \leq b$,

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje dolní závora množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.
Řekneme, že množina A je shora ohraničená (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje zdola ohraničená (zdola omezená) množina A. Množina A je ohraničená (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.
Nejmenší horní závora množiny A se nazývá supremum množiny A.

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je supremum množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A:\ x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.

Obdobně se definuje infimum množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je supremum množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \ \ x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.

Obdobně se definuje infimum množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Příklad

Je-li A libovolný z intervalů $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ nebo $(0,1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \qquad \text{a} \qquad \inf A = 0.$$

Má-li množina A největší (resp. nejmenší) prvek b, potom je $b = \sup A$ (resp. $b = \inf A$).

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je supremum množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \; x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.

Obdobně se definuje infimum množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Příklad

Je-li A libovolný z intervalů $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ nebo $(0,1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

Má-li množina A největší (resp. nejmenší) prvek b, potom je $b = \sup A$ (resp. $b = \inf A$). Zatímco největší či nejmenší prvek nemusí v A existovat, i když je množina A ohraničená, supremum a infimum existují (v ohraničeném případě) vždy (jak je vidět z výše uvedeného axiomu R19).

Plán přednášky

1. Dokončení z minula – splajny, metoda nejmenších čtverců
   - Splajny
   - Aproximace
2. Reálná čísla
3. Limita posloupnosti a funkce
4. Spojitost

Limita

V tomto odstavci se budeme podrobně zabývat situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) *blíží* k nějakému číslu či k $\pm\infty$. To pak přirozeně vede k zavedení pojmu *limita*.

Limita

V tomto odstavci se budeme podrobně zabývat situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) *blíží* k nějakému číslu či k $\pm\infty$. To pak přirozeně vede k zavedení pojmu *limita*.

Příklad

K přiblížení pojmu *limita* může dobře posloužit již známý pojem infima či suprema. Zřejmě je $0 = \inf(0,1), \quad 1 = \sup(0,1)$, a přitom ani jedno z čísel 0, 1 v množině $(0,1)$ neleží. Uvažujme posloupnost bodů

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \in (0,1)$$

pro zvyšující se n. Potom vidíme, že se hodnoty této posloupnosti *nekonečně blíží* k hodnotě infima (k nule), ale nikdy této hodnoty nedosáhnou. Podobně toto platí pro posloupnost $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \in (0,1)$ a hodnotu suprema 1.

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno *limitou funkce v bodě* x_0 .

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno *limitou funkce v bodě* x_0 .

Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ libovolně blíží k číslu L, když je x dostatečně blízko k x_0.

Příklad

Uvádíme různé *druhy* limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme $\lim_{x\to 3}(3x + 1) = 10, \qquad \lim_{x\to\infty}(3x + 1) = \infty.$

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno *limitou funkce v bodě* x_0 .

Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ libovolně blíží k číslu L, když je x dostatečně blízko k x_0.

Příklad

Uvádíme různé *druhy* limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme $\lim_{x\to 3}(3x + 1) = 10, \qquad \lim_{x\to\infty}(3x + 1) = \infty.$

(b) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ máme (viz obr.) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno *limitou funkce v bodě* x_0 .

Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0, pokud se funkční hodnoty $f(x)$ <u>libovolně blíží</u> k číslu L, když je x <u>dostatečně blízko</u> k x_0.

Příklad

Uvádíme různé *druhy* limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme
$\lim_{x\to 3}(3x + 1) = 10, \qquad \lim_{x\to\infty}(3x + 1) = \infty.$

(b) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ máme (viz obr.)
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$

(c) Co je $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$?

Okolí bodu

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval $\mathcal{O}$, který a obsahuje.
Je-li okolí definované jako interval $\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ pro kladné číslo δ, hovoříme o δ-**okolí** bodu a (a v případě množiny $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ o ryzím (též prstencovém) okolí bodu a).

Okolí bodu

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval $\mathcal{O}$, který a obsahuje.
Je-li okolí definované jako interval $\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ pro kladné číslo δ, hovoříme o δ-**okolí** bodu a (a v případě množiny $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ o ryzím (též prstencovém) okolí bodu a).
Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ (*vlastních bodů*) o dvě nekonečné hodnoty $\pm\infty$ (*nevlastní body*), $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Pro tyto účely si zavádíme i pravidla pro počítání s těmito formálně přidanými hodnotami pro libovolná *konečná* čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$a + \infty = \infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$a \cdot \infty = \infty, \text{ je-li } a > 0$$

$$a \cdot \infty = -\infty, \text{ je-li } a < 0$$

Okolí bodu

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval $\mathcal{O}$, který a obsahuje.
Je-li okolí definované jako interval $\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ pro kladné číslo δ, hovoříme o δ-**okolí** bodu a (a v případě množiny $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ o ryzím (též prstencovém) okolí bodu a).
Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ (*vlastních bodů*) o dvě nekonečné hodnoty $\pm\infty$ (*nevlastní body*), $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Pro tyto účely si zavádíme i pravidla pro počítání s těmito formálně přidanými hodnotami pro libovolná *konečná* čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
a + \infty &= \infty \\
a - \infty &= -\infty \\
a \cdot \infty &= \infty, \text{ je-li } a > 0 \\
a \cdot \infty &= -\infty, \text{ je-li } a < 0
\end{aligned}
$$

Okolím nekonečna, resp. $-\infty$, rozumíme interval (a, ∞), resp.

Limita

Definice

Buď $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Limita

Definice

Buď $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Poznámka

To, že požadujeme, aby $x \neq x_0$, znamená, že **limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě x_0!**, tj. zajímají nás pouze hodnoty v **ryzím** okolí bodu x_0.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to 3}(3x+1) = 10$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x \to 3}(3x + 1) = 10$.

Řešení

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $\delta > 0$ takové, aby $|y - 10| < \varepsilon$, kdykoliv bude $0 < |x - 3| < \delta$. Tedy

$$\big|(3x + 1) - 10\big| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |3x - 9| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stačí tedy vzít $\boxed{\delta := \frac{\varepsilon}{3}}$, případně libovolné jiné δ splňující $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Řešení

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $a > 0$ takové, aby $|y - 0| < \varepsilon$, kdykoliv bude $x > a$. Tedy
$|\frac{1}{x}| < \varepsilon, \quad$ tj. $\quad \frac{1}{x} < \varepsilon, \quad$ tj. $\quad x > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy vzít $a := \frac{1}{\varepsilon}$, případně libovolné jiné a splňující $a \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Řešení

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $a > 0$ takové, aby $|y - 0| < \varepsilon$, kdykoliv bude $x > a$. Tedy
$|\frac{1}{x}| < \varepsilon$, tj. $\frac{1}{x} < \varepsilon$, tj. $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy vzít $a := \frac{1}{\varepsilon}$, případně libovolné jiné a splňující $a \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Ve vlastních bodech x_0 se můžeme blížit k bodu x_0 také jen zprava nebo jen zleva, tj. v definici limity použijeme v pouze pravé ryzí okolí bodu x_0 nebo pouze levé ryzí okolí bodu x_0. Dostáváme pak pojmy *limity zprava a limity zleva*.

Příklad

Pro funkci $\operatorname{sgn} x$ (*signum*=znaménko) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0, \\ -1, & \text{pro } x < 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Příklad

Pro funkci $\operatorname{sgn} x$ (*signum*=znaménko) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0, \\ -1, & \text{pro } x < 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Příklad

Pro funkci $\frac{1}{x}$ platí

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Limita posloupnosti

Jestliže je funkce f je definována pouze pro přirozená čísla, hovoříme o **limitách posloupností reálných nebo komplexních čísel**. Zřejmě má smysl prát se pouze po limitách v ∞ (tj. jediným hromadným bodem $\mathbb{N}$ je ∞) a píšeme pro $f(n) = a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Podle definice to pak znamená, že pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ limitní hodnoty a existuje index $N \in \mathbb{N}$ takový, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$ pro všechny $n \geq N$. Ve skutečnosti jsme tedy v tomto speciálním případě přeformulovali definici konvergence posloupnosti. Říkáme také, že *posloupnost a_n konverguje k a*.

Kdy limita neexistuje?

- skok – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),

Kdy limita neexistuje?

- skok – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- *nekonečný* skok – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),

Kdy limita neexistuje?

- skok – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- *nekonečný* skok – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),
- oscilace – např. funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Kdy limita neexistuje?

- <u>skok</u> – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- <u>*nekonečný* skok</u> – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),
- <u>oscilace</u> – např. funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Kdy limita neexistuje?

- skok – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- *nekonečný* skok – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),
- oscilace – např. funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad

Funkce

$$q(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \quad \text{(tj. pro } x \text{ racionální)}, \\ 0, & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \quad \text{(tj. pro } x \text{ iracionální)}, \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, protože v libovolném okolí zvoleného bodu x_0 se nacházají jak racionální tak iracionální čísla a tedy tato funkce zde nabývá hodnot 1 i 0 (a tedy zde nemůže mít limitu).

Vlastnosti limit

Věta

1. *Funkce* $f(x)$ *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *nejvýše jednu limitu.*

Vlastnosti limit

Věta

1. *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*
2. *Má-li $f(x)$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom je $f(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohraničená.*

Vlastnosti limit

Věta

1. *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*
2. *Má-li $f(x)$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom je $f(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohraničená.*
3. *Limita existuje, právě když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny, tj.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Vlastnosti limit

Věta

Jsou-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = M,$$

kde $L, M \in \mathbb{R}$ *(pouze vlastní limity!) a* $x_0 \in \mathbb{R}^*$*, potom*

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L \pm M,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \,.\, g(x) = L \,.\, M,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \qquad \textit{pokud } M \neq 0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \left| f(x) \right| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right| = |L|.$$

Vlastnosti limit

Věta (O třech limitách)

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. *Je-li* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *na nějakém ryzím okolí bodu* x_0 *a je-li*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = L = \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x),$$

potom také existuje limita funkce $f(x)$ *a je rovna číslu* L, *tj.*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L.$$

Vlastnosti limit

Věta (O třech limitách)

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Je-li $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 a je-li

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = L = \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x),$$

potom také existuje limita funkce $f(x)$ a je rovna číslu L, tj.

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L.$$

Příklad

Rozhodněte, jestli má funkce $x \sin \frac{1}{x}$ limitu v bodě $x_0 = 0$.

Vlastnosti limit

Věta (O třech limitách)

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Je-li $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 a je-li

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = L = \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x),$$

potom také existuje limita funkce $f(x)$ a je rovna číslu L, tj.

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L.$$

Příklad

Rozhodněte, jestli má funkce $x \sin \frac{1}{x}$ limitu v bodě $x_0 = 0$.

Řešení

Protože je funkce $\sin x$ ohraničená (jedničkou shora a mínus jedničkou zdola), pro $x \neq 0$ platí nerovnosti $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$.

Plán přednášky

1. Dokončení z minula – splajny, metoda nejmenších čtverců
   - Splajny
   - Aproximace
2. Reálná čísla
3. Limita posloupnosti a funkce
4. Spojitost

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny *důležité* vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Obdobně spojitost zprava a zleva.

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny *důležité* vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Obdobně spojitost zprava a zleva. Funkce f je spojitá na množině A, jestliže je spojitá ve ve všech bodech $x_0 \in A$ (příp. jednostranně).

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny *důležité* vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Obdobně spojitost zprava a zleva. Funkce f je spojitá na množině A, jestliže je spojitá ve ve všech bodech $x_0 \in A$ (příp. jednostranně).

Příklad

Z vlastností limity snadno plyne, že každý polynom (a tedy i každý splajn) je spojitou funkcí na celém $\mathbb{R}$. Každá racionální lomená funkce je pak spojitá ve všech bodech, kde je nenulový jmenovatel.

Příklad

1. Funkce $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.
2. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$, na intervalu $(0, \infty)$, ale není spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ (tedy na $\mathbb{R}$).

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \,.\, g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \,.\, g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$

2. (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big) = f(M).$$

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce
$$(f \pm g)(x), \quad f(x)\,.\,g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$
2. (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom
$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big) = f(M).$$
3. (Spojitost složené funkce.) Je-li funkce $g(x)$ spojitá v bodě x_0 a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom je složená funkce $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ spojitá v bodě x_0.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.

Věta (Bolzanova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom $f(x)$ nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou.

Důsledek

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, pak existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že platí $f(c) = 0$, tj. rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu (a, b) alespoň jedno řešení

Základní limity

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Základní limity

Příklad

Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení

Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad$ (viz obr.).
A protože je pro tato x hodnota $\sin x > 0$, je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{tj.} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož je funkce $\cos x$ spojitá (v nule), obě strany nerovnosti se pro $x \to 0^+$ blíží k 1, a tedy podle věty o třech limitách je

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$