Matematika II – 4. přednáška
Derivace – pravidla, základní věty

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

8. 10. 2008

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/skript.pdf`).

Plán přednášky

Věty o střední hodnotě

Odvodíme několik výsledků, které umožní snáze pracovat s funkcemi při modelování reálných problémů.

Věta (Rolleova)

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Jestliže platí* $f(a) = f(b)$, *pak existuje* $c \in (a, b)$ *takové, že* $f'(c) = 0$.

Důkaz.

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině) má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b).

Důkaz.

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině) má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b).
Předpokládejme tedy, že buď maximum nebo mimimum je jiné a nechť nastává jedno z nich ve vnitřním bodě c. Pak ovšem není možné, aby v c bylo $f'(c) \neq 0$, protože to by v tomto bodě byla byla funkce f buď rostoucí nebo klesající a jistě by tedy v okolí bodu c nabývala větších i menších hodnot, než je $f(c)$. $\square$

Z Rolleovy věty snadno vyplývá tzv. **věta o střední hodnotě**.

Věta (Lagrangeova)

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Pak existuje* $c \in (a, b)$ *takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz.

Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (viz obrázek).

Důkaz.

Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (viz obrázek). Rovnice naší sečny je

$$y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Rozdíl $h(x) = f(x) - g(x)$ udává vzdálenost grafu od sečny (v hodnotách y). Jistě platí $h(a) = h(b)$ a

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle předchozí věty existuje bod c, ve kterém je $h'(c) = 0$. □

Větu o střední hodnotě můžeme také přepsat ve tvaru:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

a v případě parametricky zadané křivky v rovině, tj. dvojice funkcí $y = f(t)$, $x = g(t)$, je stejný výsledek o existenci rovnoběžné tečny k sečně krajními body popsán takto:

Důsledek (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Nechť funkce $y = f(t)$ a $x = g(t)$ jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelné uvnitř tohoto intervalu a $g'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in (a, b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Větu o střední hodnotě můžeme také přepsat ve tvaru:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

a v případě parametricky zadané křivky v rovině, tj. dvojice funkcí $y = f(t)$, $x = g(t)$, je stejný výsledek o existenci rovnoběžné tečny k sečně krajními body popsán takto:

Důsledek (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Nechť funkce $y = f(t)$ a $x = g(t)$ jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelné uvnitř tohoto intervalu a $g'(t) \neq 0$ pro všechny $t \in (a, b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Všimněte si, že jakkoliv jde o důsledek předchozích tvrzení, zároveň tato tvrzení í zobecňuje $(g(t) = t)$.

Důkaz.

Opět spoléháme na použití Rolleovy věty. Položíme proto

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t).$$

Nyní $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, $h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, takže existuje $c \in (a, b)$ takový, že $h'(c) = 0$. Protože je $g'(c) \neq 0$, dostáváme právě požadovaný vztah. $\square$

Věty o střední hodnotě mají celou řadu důsledků týkajících se vlastnosti funkcí. Např.:

- Které funkce mají nulovou derivaci? – Pouze konstantní funkce.
- Které funkce mají stejnou derivaci? – Právě ty funkce, které se navzájem liší o konstantu.

Důsledek

Je-li $f(x)$ *diferencovatelná na* (a,b) *a je-li* $f'(x)=0$ *na* (a,b), *potom*

$$f(x) \equiv c \quad na\ (a,b).$$

Důkaz.

Pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, platí, že $f(x)$ je spojitá na $[x_1, x_2]$ (neboť existuje vlastní $f'(x)$) a diferencovatelná na (x_1, x_2). Podle Lagrangeovy věty je pak pro nějaký bod $c \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

A protože byly body x_1 a x_2 vybrány libovolně v intervalu (a, b), musí být nutně $f(x)$ konstantní na intervalu (a, b). $\square$

Důsledek

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné na (a, b) a je-li $f'(x) = g'(x)$ na (a, b), potom $f(x) = g(x) + c$ na (a, b), tj. $f(x)$ a $g(x)$ se liší o konstantu.

Důkaz.

Funkce $(f - g)(x)$ je diferencovatelná na (a, b) a $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ na (a, b). Podle předchozího důsledku je pak $f(x) - g(x) \equiv c$ na (a, b), tj. $f(x) = g(x) + c$ na (a, b). $\square$

Plán přednášky

Podobná úvaha jako v posledním tvrzení vede k mimořádně užitečnému nástroji pro počítání limit funkcí. Je znám jako **L'Hospitalovo pravidlo**:

Věta

Předpokládejme, že f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a nechť existují limity

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pak existuje i limita

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a jsou si rovny.

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo nelze použít, pokud limita podílu derivací neexistuje. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\infty} \right| = 0,$$

ale limita podílu derivací neexistuje, protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} \cos x \qquad \text{(neexistuje)}.$$

Poznámka

- L'Hospitalovo pravidlo nelze použít, pokud limita podílu derivací neexistuje. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\infty} \right| = 0,$$

ale limita podílu derivací neexistuje, protože

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} \cos x \qquad \text{(neexistuje)}.$$

- Pravidlo nelze nelze použít na typ limity $\frac{\text{cokoliv}}{0}$. Např. limita podílu funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x} \quad \left| \text{typ } \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} \right| = \infty,$$

ale limita podílu derivací je rovna -1.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v x_0 mají funkce f a g nulovou hodnotu.
Výsledek je opět jednoduše představitelný pomocí obrázku.
Uvažujme body $[g(x), f(x)] \in \mathbb{R}^2$ parametrizované proměnnou x.
Podíl hodnot pak odpovídá směrnici sečny mezi body $[0, 0]$ a $[g(x), f(x)]$. Zároveň víme, že podíl derivací odpovídá směrnici tečny v příslušném bodě. Z existence limity směrnic tečen tedy chceme dovodit existenci limity směrnic sečen.

Důkaz – pokr.

Technicky lze využít věty o střední hodnotě v parametrickém tvaru. Předně si uvědomme, že v tvrzení věty implicitně předpokládáme existenci výrazu $f'(x)/g'(x)$ na nějakém okolí x_0, zejména tedy pro dostatečně blízké body c k x_0 bude $g'(c) \neq 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

kde c_x je číslo mezi x_0 a x. Nyní si všimněme, že z existence limity $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ vyplývá, že stejnou hodnotu bude mít i limita libovolné posloupnosti vzniklé dosazením hodnot $x = x_n$ jdoucích k x_0 do $f'(x)/g'(x)$. Zejména tedy můžeme dosadit jakoukoliv posloupnost c_{x_n} pro $x_n \to x_0$ a proto bude existovat i limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ a poslední dvě limity zjevně budou mít stejnou hodnotu. Dokázali jsme tedy, že naše hledaná limita existuje a má také stejnou hodnotu. $\square$

Jednoduše lze rozšířit L'Hospitalovo pravidlo i pro limity v nevlastních bodech $\pm\infty$ a v případě nevlastních hodnot limit. Je-li, např.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

potom je $\lim_{x\to 0_+} f(1/x) = 0$ a $\lim_{x\to 0_+} g(1/x) = 0$. Zároveň z existence limity podílu derivací v nekonečnu dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{(f(1/x))'}{(g(1/x))'} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Použitím předchozí věty tedy dostáváme, že v tomto případě bude existovat i limita podílu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ještě jednodušší je postup při výpočtu limity v případě, kdy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Stačí totiž psát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)},$$

což je již případ pro použití L'Hospitalova pravidla z předchozí věty.

Věta

Nechť f a g jsou funkce diferencovatelné v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, ne však nutně v bodě x_0 samotném, a nechť existují limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x\to 0} g(x) = \pm\infty$. Jestliže existuje limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pak existuje i limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a jsou si rovny.

Příklad

1. $$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Příklad

1.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

2.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Plán přednášky

Pokud máme zadánu funkci $f(x)$ vzorcem $y = f(x)$, hovoříme o jejím explicitním zadání. Obecnějším zadáním funkce je rovnice $F(x, y) = 0$, kde závislá proměnná y představuje *neznámou* funkci. Pokud tuto rovnici nelze (nebo to nepotřebujeme) vyřešit vzhledem k y, pak hovoříme o funkci zadané implicitně. Avšak i v tomto obecnějším případě budeme schopni vypočítat $y'(x)$ (aniž bychom znali explicitní vzorec pro $y(x)$), a to pomocí pravidla pro derivaci složené funkce.

Příklad

Rovnice $y^2 = x$ definuje dvě diferencovatelné funkce

$$y_1 = \sqrt{x}, \qquad y_2 = -\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Avšak i bez znalosti samotných funkcí y_1 a y_2 lze derivováním rovnice $y^2 = x$ spočítat, že

$$(y^2)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y},$$

což je jediný vzorec pro y' obsahující jak y_1 tak y_2.

Příklad

Rovnice $y^2 = x$ definuje dvě diferencovatelné funkce

$$y_1 = \sqrt{x}, \qquad y_2 = -\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Avšak i bez znalosti samotných funkcí y_1 a y_2 lze derivováním rovnice $y^2 = x$ spočítat, že

$$(y^2)' = (x)' \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2y},$$

což je jediný vzorec pro y' obsahující jak y_1 tak y_2.

Při derivování implicitně zadaných funkcí obsahuhe výsledná derivace y' jak proměnnou x tak proměnnou y (na rozdíl od *běžného* derivování funkce, kdy je ve výsledku pouze proměnná x).

Příklad

Určete směrnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $P = [-3, 4]$.

Příklad

Určete směrnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $P = [-3, 4]$.

Řešení

Derivováním zadané rovnice podle proměnné x dostaneme

$$(x^2 + y^2)' = (25)' \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

A proto je směrnice tečny v bodě P (=derivace v bodě P) rovna

$$y' = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Plán přednášky

Definice

Funkce $f(x)$ je

- rostoucí na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- klesající na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- neklesající na intervalu I, pokud $f(x_1) \leq f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- nerostoucí na intervalu I, pokud $f(x_1) \geq f(x_2)$ pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*
3. *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in I$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*
3. *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.
4. *Funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Důkaz.

Snadný s využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě, neboť pro $x < y$ má výraz

$$f(y) - f(x)$$

stejné znaménko jako

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

$\square$

Důkaz.

Snadný s využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě, neboť pro $x < y$ má výraz

$$f(y) - f(x)$$

stejné znaménko jako

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

□

Důsledek

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Jestliže $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$, potom je funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I.*
2. *Jestliže $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$, potom je funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I.*

Pro určení intervalů monotonie funkce $f(x)$ tedy stačí určit body, kdy $f'(x)$ mění znaménko. Zejména to jsou body, ve kterých je $f'(x) = 0$ nebo ve kterých $f'(x)$ neexistuje.

Pro určení intervalů monotonie funkce $f(x)$ tedy stačí určit body, kdy $f'(x)$ mění znaménko. Zejména to jsou body, ve kterých je $f'(x) = 0$ nebo ve kterých $f'(x)$ neexistuje.

Příklad

Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = e^{x^3-6x}.$$

Řešení

$$f'(x) = e^{x^3-6x} \,.\, (3x^2 - 6) = 3\, e^{x^3-6x} \,.\, (x^2 - 2), \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že $f'(x) = 0$ pouze pro $x = \pm\sqrt{2}$. Na každém z intervalů $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$ určíme znaménko derivace např. výběrem nějakého bodu z tohoto intervalu, protože víme, že se znaménko $f'(x)$ v těchto intervalech již nemění.

Definice

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- lokální maximum, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- lokální minimum, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- ostré lokální maximum, pokud $f(x) < f(x_0)$ pro všechna x z nějakého ryzího okolí bodu x_0,
- ostré lokální minimum, pokud $f(x) > f(x_0)$ pro všechna x z nějakého ryzího okolí bodu x_0.

Následující věta říká, že tečna v bodech lokálních extrémů (pokud zde existuje vlastní derivace) musí nutně být vodorovná.

Věta

Existuje-li vlastní derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0, kde má funkce $f(x)$ lokální extrém, potom je nutně $f'(x_0) = 0$.

Důkaz.

Zřejmý. □

Následující věta říká, že tečna v bodech lokálních extrémů (pokud zde existuje vlastní derivace) musí nutně být vodorovná.

Věta

Existuje-li vlastní derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0, kde má funkce $f(x)$ lokální extrém, potom je nutně $f'(x_0) = 0$.

Důkaz.

Zřejmý. □

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají stacionární body funkce $f(x)$. Opačné tvrzení k větě neplatí, tj. z $f'(x_0) = 0$ neplyne extrém v bodě x_0. Nejjednodušším příkladem je funkce $f(x) = x^3$, která v počátku nemá extrém, ale je $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$ (tj. tečna v bodě $x_0 = 0$ je vodorovná).

Důsledek

Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.

Lokální extrémy a derivace

Věta

Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje vlastní derivace $f'(x)$ na nějakém **ryzím** *okolí bodu x_0.*

1. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 opačná znaménka, potom je v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*

Lokální extrémy a derivace

Věta

Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje vlastní derivace $f'(x)$ na nějakém **ryzím** *okolí bodu x_0.*

1. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 opačná znaménka, potom je v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\ominus$ do $\oplus$, potom je v bodě x_0 lokální minimum,*

Lokální extrémy a derivace

Věta

Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje vlastní derivace $f'(x)$ na nějakém **ryzím** *okolí bodu x_0.*

1. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 opačná znaménka, potom je v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\ominus$ do $\oplus$, potom je v bodě x_0 lokální minimum,*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\oplus$ do $\ominus$, potom je v bodě x_0 lokální maximum.*

Lokální extrémy a derivace

Věta

Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje vlastní derivace $f'(x)$ na nějakém **ryzím** *okolí bodu x_0.*

1. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 opačná znaménka, potom je v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\ominus$ do $\oplus$, potom je v bodě x_0 lokální minimum,*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\oplus$ do $\ominus$, potom je v bodě x_0 lokální maximum.*
2. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 stejná znaménka, potom není v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*

Lokální extrémy a derivace

Věta

Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje vlastní derivace $f'(x)$ na nějakém **ryzím** *okolí bodu x_0.*

1. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 opačná znaménka, potom je v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\ominus$ do $\oplus$, potom je v bodě x_0 lokální minimum,*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\oplus$ do $\ominus$, potom je v bodě x_0 lokální maximum.*
2. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 stejná znaménka, potom není v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*
   - *má-li $f'(x)$ v okolí bodu x_0 kladné znaménko, potom je $f(x)$ v bodě x_0 rostoucí,*

Lokální extrémy a derivace

Věta

Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ a existuje vlastní derivace $f'(x)$ na nějakém **ryzím** *okolí bodu x_0.*

1. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 opačná znaménka, potom je v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\ominus$ do $\oplus$, potom je v bodě x_0 lokální minimum,*
   - *je-li změna $f'(x)$ z $\oplus$ do $\ominus$, potom je v bodě x_0 lokální maximum.*
2. *Má-li $f'(x)$ v levém a pravém okolí bodu x_0 stejná znaménka, potom není v bodě x_0 lokální extrém. Přitom*
   - *má-li $f'(x)$ v okolí bodu x_0 kladné znaménko, potom je $f(x)$ v bodě x_0 rostoucí,*
   - *má-li $f'(x)$ v okolí bodu x_0 záporné znaménko, potom je $f(x)$ v bodě x_0 klesající.*

Lokální extrémy a druhá derivace

Věta

Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $f'(x_0) = 0$, a nechť existuje $f''(x_0)$.

1. *Je-li $f''(x_0) > 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální minimum.*
2. *Je-li $f''(x_0) < 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Lokální extrémy a druhá derivace

Věta

Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $f'(x_0) = 0$, a nechť existuje $f''(x_0)$.

1. *Je-li $f''(x_0) > 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální minimum.*
2. *Je-li $f''(x_0) < 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Důkaz.

(i) $f''(x_0) > 0$ a $f'(x_0) = 0$ znamená, že $f'(x)$ roste v bodě x_0 z $\ominus$ do $\oplus$ hodnot, tedy funkce $f(x)$ samotná klesá a pak roste. Tedy je v bodě x_0 ostré lokální minimum.
(ii) analogicky. $\square$

Poznámka

Obecněji, je-li

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0,$$

potom

- pro k sudé je ostrý lokální extrém v bodě x_0, přičemž
  - pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ je v bodě x_0 ostré lokální minimum,
  - pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ je v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- pro k liché není lokální extrém v bodě x_0, přičemž
  - pro $f^{(k)}(x_0) > 0$ funkce $f(x)$ roste v bodě x_0,
  - pro $f^{(k)}(x_0) < 0$ funkce $f(x)$ klesá v bodě x_0.

Všechny tyto případy si můžete lehce ilustrovat na mocninných funkcích x^2, x^3, x^4, x^5, atd. v bodě $x_0 = 0$.

Globální extrémy

Definice

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- globální maximum na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$,
- globální minimum na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$.

Poznámka

- Místo globální max/min se také používá termín absolutní max/min.

Poznámka

- Místo globální max/min se také používá termín absolutní max/min.
- Globální max/min nemusí být jediné. Např. funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ má globální max 1 v bodech $x = -1$ a $x = 1$, kdežto globální min 0 v bodě $x = 0$.

Poznámka

- Místo globální max/min se také používá termín absolutní max/min.
- Globální max/min nemusí být jediné. Např. funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ má globální max 1 v bodech $x = -1$ a $x = 1$, kdežto globální min 0 v bodě $x = 0$.
- Globální max/min nemusí ani existovat.

Poznámka

- Místo globální max/min se také používá termín absolutní max/min.
- Globální max/min nemusí být jediné. Např. funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ má globální max 1 v bodech $x = -1$ a $x = 1$, kdežto globální min 0 v bodě $x = 0$.
- Globální max/min nemusí ani existovat.
- Weierstrassova věta zaručuje existenci globálního max/min – za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Poznámka

- Místo globální max/min se také používá termín absolutní max/min.
- Globální max/min nemusí být jediné. Např. funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ má globální max 1 v bodech $x = -1$ a $x = 1$, kdežto globální min 0 v bodě $x = 0$.
- Globální max/min nemusí ani existovat.
- Weierstrassova věta zaručuje existenci globálního max/min – za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.
- Pokud víme, že globální extrémy existují, potom musí tyto globální extrémy být ve stacionárních bodech nebo v bodech, kde neexistuje $f'(x)$, nebo v krajních bodech daného intervalu. Nemusíme již pak určovat, jestli jsou ve stacionárních bodech lokální extrémy či nikoliv.

Příklad

Určete globální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \text{na intervalu } [-1, 1].$$

Příklad

Určete globální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \text{na intervalu } [-1, 1].$$

Řešení

Protože je $f(x)$ spojitá na intervalu $[-1, 1]$, globální extrémy v tomto intervalu existují.

stacionární body:	$x = \frac{1}{4}$,	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}$,
$\nexists\ f'(x)$	$x = 0$,	$f(0) = -1$,
krajní body:	$x = -1$,	$f(-1) = -1 - 1 - 1 = -3$,
	$x = 1$,	$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$.