Matematika II – 6. přednáška
Průběh funkce, optimalizace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

22. 10. 2008

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/skript.pdf`).

Plán přednášky

1. Průběh funkce
   - Konvexnost, konkávnost, inflexe
   - Asymptoty
   - Celkový průběh funkce
2. Diferenciál funkce a Taylorův polynom

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*
3. *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*
3. *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$.
4. *Funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Věta

Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.

Věta

Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.

Věta

Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $f'(x_0) = 0$, a nechť existuje $f''(x_0)$.

1. *Je-li $f''(x_0) > 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální minimum.*
2. *Je-li $f''(x_0) < 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) *zatáčí*. Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro diferencovatelné funkce.

Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) *zatáčí*. Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro diferencovatelné funkce.

Definice

Nechť má funkce $f(x)$ vlastní derivaci na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Funkce $f(x)$ se nazývá

- konvexní na intervalu I, pokud je $f'(x)$ neklesající na I,
- konkávní na intervalu I, pokud je $f'(x)$ nerostoucí na I.

Poznámka

To, že funkce $f'(x)$ je neklesající na intervalu I (tj. $f(x)$ je konvexní), znamená, že tečny mají *neklesající směrnici*, tj.

graf funkce $f(x)$ zatáčí doleva a tečny leží pod grafem.

To, že funkce $f'(x)$ je nerostoucí na intervalu I (tj. $f(x)$ je konkávní), znamená, že tečny mají *nerostoucí směrnici*, tj.

graf funkce $f(x)$ zatáčí doprava a tečny leží nad grafem.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.
3. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $(-\infty, 0]$ funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je x^3 konkávní na $(-\infty, 0]$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.
3. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je na intervalu $(-\infty, 0]$ funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je x^3 konkávní na $(-\infty, 0]$.
4. Funkce $f(x) = ax + b$ má derivaci $f'(x) = a$, což je funkce konstantní (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je $ax + b$ konvexní na $\mathbb{R}$. Současně je konstantní funkce $f'(x) = a$ nerostoucí na $\mathbb{R}$, a proto je $ax + b$ také konkávní na $\mathbb{R}$.

Konvexnost a druhá derivace

Věta

Nechť $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ je otevřený interval a nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci $f''(x)$ na I.

(i) *Je-li $f''(x) > 0$ na I, potom je $f(x)$ konvexní na intervalu I.*

(ii) *Je-li $f''(x) < 0$ na I, potom je $f(x)$ konkávní na intervalu I.*

Konvexnost a druhá derivace

Věta

Nechť $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ je otevřený interval a nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci $f''(x)$ na I.

(i) *Je-li $f''(x) > 0$ na I, potom je $f(x)$ konvexní na intervalu I.*

(ii) *Je-li $f''(x) < 0$ na I, potom je $f(x)$ konkávní na intervalu I.*

Důkaz.

ad (i): Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, potom je funkce $f'(x)$ rostoucí na intervalu I. Tedy je přímo podle definice funkce $f(x)$ konvexní na intervalu I. □

Inflexní bod

Tam, kde se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, se nacházejí tzv. inflexní body funkce.

Definice

Nechť má funkce $f(x)$ vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x_0)$. Je-li $f'(x_0)$ nevlastní, potom navíc předpokládejme, že je $f(x)$ spojitá v bodě x_0. Bod x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, pokud v nějakém levém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konvexní a v nějakém pravém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konkávní, nebo naopak.

Vlastnosti inflexních bodů

Věta

(i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace* $f''(x_0) = 0$ *v inflexním bodě* x_0*, potom je* $f''(x_0) = 0$.

(ii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f''(x)$ *mění znaménko v bodě* x_0*, potom je* x_0 *inflexní bod.*

(iii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$*, potom je* x_0 *inflexní bod.*

Vlastnosti inflexních bodů

Věta

(i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace* $f''(x_0) = 0$ *v inflexním bodě* x_0, *potom je* $f''(x_0) = 0$.

(ii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f''(x)$ *mění znaménko v bodě* x_0, *potom je* x_0 *inflexní bod.*

(iii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$, *potom je* x_0 *inflexní bod.*

Zejména část (ii) v předchozí větě ukazuje, jak inflexní body najít. Současně ze změny znaménka $f''(x)$ (tedy jestli se jedná o změnu z $\ominus$ do $\oplus$ nebo o změnu z $\oplus$ do $\ominus$) poznáme, kterým směrem graf funkce $f(x)$ v bodě x_0 *zatáčí*.

Příklad

Určete monotonii, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \qquad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

Příklad

Určete monotonii, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \qquad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

Řešení

$f'(x) = 1 + \cos x = 0$ implikuje, že $\cos x = -1$, tedy $x = \pi, 3\pi$ jsou stacionární body (v intervalu $[0, 4\pi]$). Body, kde neexistuje $f'(x)$ nejsou. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f'(x)$ v těchto intervalech. Tedy

$$f(x) \text{ je rostoucí na } [0, 4\pi],$$
$$f(x) \text{ nemá lokální extrémy.}$$

Řešení příkladu – pokr.

Řešení

$f''(x) = -\sin x = 0$ implikuje, že $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ jsou kandidáti na inflexní body. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f''(x)$ v těchto intervalech. Tedy

$$\begin{gathered} f(x) \text{ je konvexní na } [\pi, 2\pi] \text{ a na } [3\pi, 4\pi], \\ f(x) \text{ je konkávní na } [0, \pi] \text{ a na } [2\pi, 3\pi], \\ f(x) \text{ má inflexi v bodech } x = \pi, 2\pi, 3\pi. \end{gathered}$$

A protože můžeme jednoduše vypočítat funkční hodnoty a hodnoty derivace (pro sklon tečny) ve zmiňovaných stacionárních, inflexních a krajních bodech, můžeme také načrtnout graf této funkce na intervalu $[0, 4\pi]$.

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Definice

- Přímka $x = x_0$ (svislá přímka) je asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$, pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě x_0 nevlastní, tj.
  $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Definice

- Přímka $x = x_0$ (svislá přímka) je asymptotou bez směrnice funkce $f(x)$, pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě x_0 nevlastní, tj.
  $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
- Přímka $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) je asymptotou se směrnicí v ∞, pokud
  $$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$
  Podobně pro asymptotu se směrnicí v $-\infty$.

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ}\ \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Poznámka

Je zřejmé, že asymptoty bez směrnice mohou být pouze v bodech nespojitosti funkce $f(x)$. Samozřejmě ne každý bod nespojitosti zadává asymptotu, viz např. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ v $x_0 = 0$.

Asymptoty se směrnicí

Věta

Přímka $y = ax + b$ *je asymptotou funkce* $f(x)$ *v* ∞ $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax].$$

Podobně, přímka $y = ax + b$ *je asymptotou funkce* $f(x)$ *v* $-\infty$ $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax].$$

Důkaz.

Býti asymptotou v ∞ znamená, že $f(x) \approx ax + b$ pro $x \to \infty$. Tedy pokud obě strany podělíme výrazem x, dostaneme, že

$$\frac{f(x)}{x} \approx a + \frac{b}{x} \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

A protože výraz $\frac{b}{x} \to 0$ pro $x \to \infty$, dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu a.
Dále, známe-li koeficient a, potom

$$f(x) - ax \approx b \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

$\square$

Samozřejmě, pokud alespoň jedna z limit definujících koeficienty a, b je nevlastní nebo neexistuje, tak potom daná funkce asymptotu v příslušném ∞ nebo $-\infty$ nemá.

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Řešení

$x = -2$ je asymptota bez směrnice.

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Řešení

$x = -2$ je asymptota bez směrnice.
$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \cdots = 1$, $b_+ = \cdots = -10$. Podobně pro $x \to -\infty$. Proto $y = x - 10$ je asymptota v ∞ i v $-\infty$.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech *význačných* bodech (např, stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje $f'(x)$ nebo $f''(x)$, v krajních bodech, atd.),

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech *význačných* bodech (např, stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje $f'(x)$ nebo $f''(x)$, v krajních bodech, atd.),
- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce $f(x)$.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice
- $f(x)$ nemá žádnou asymptotu se směrnicí

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice
- $f(x)$ nemá žádnou asymptotu se směrnicí
- Hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech *význačných* bodech:
  $f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \approx 1.19, \quad f'(2) = \frac{1}{4}.$

Plán přednášky

1. Průběh funkce
   - Konvexnost, konkávnost, inflexe
   - Asymptoty
   - Celkový průběh funkce
2. Diferenciál funkce a Taylorův polynom

Diferenciál funkce je pojem, který se pro funkce jedné proměnné využívá pouze pro potřeby integrování nebo pro přibližné výpočty. Pro funkce více proměnných má mnohem větší význam (viz MB103).

Definice

Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ funkce $y = f(x)$. Potom definujeme

- diferenciál dx (diferenciál nezávislé proměnné) jako $\boxed{dx = x - x_0}$ (pro x blízko x_0),
- diferenciál dy (diferenciál závislé proměnné) jako $\boxed{dy = f'(x_0) \,.\, dx}$.

Alternativní značení pro dy je df, případně $df(x_0)$ pokud chceme zdůraznit, že se jedná o diferenciál v bodě x_0.

Uvědomte si, že pokud je x napravo od x_0, je $dx = x - x_0 > 0$, pokud je ale x nalevo od x_0, je $dx = x - x_0 < 0$.

Co to vlastně ten diferenciál je?

Pokud se podíváme na rovnici tečny v bodě x_0, máme

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)\,(x - x_0), \qquad \text{kde } y_0 = f(x_0), \\ y - f(x_0) &= \underbrace{f'(x_0)\,dx}_{dy} = df(x_0). \end{aligned}$$

Co to vlastně ten diferenciál je?
Pokud se podíváme na rovnici tečny v bodě x_0, máme

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0), \qquad \text{kde } y_0 = f(x_0),$$
$$y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\,dx}_{dy} = df(x_0).$$

Vidíme tedy, že diferenciál dy je <u>změna funkčních hodnot na tečně</u>. A protože hodnoty na tečně aproximují funkční hodnoty $f(x)$ pro x <u>blízko</u> bodu x_0, plyne odtud vzoreček pro přibližné výpočty:

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0), \qquad \text{tj.} \qquad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

(Jedná se vlastně o rovnici tečny trošku zapsanou jiným způsobem). Tedy hodnoty funkce $f(x)$ pro x *blízko* bodu x_0 se přibližně rovnají hodnotám na tečně v bodě x_0, přičemž pro tento výpočet musíme znát hodnotu funkce $f(x_0)$ a derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0.
<u>Diferenciál</u> je tedy <u>přibližná změna funkčních hodnot</u> pro x blízko x_0.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{85}$.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{85}$.

Řešení

Protože známe $\sqrt{81} = 9$, položíme $x_0 = 81$ a $x = 85$, tj. $dx = x - x_0 = 4$. Tedy pro $f(x) = \sqrt{x}$ potom je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a tedy $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$. Ze vzorce pro aproximaci potom plyne, že

$$f(85) \approx f(81) + df(81) = f(81) + f'(81)\,dx, \qquad \text{tj.}$$

$$\sqrt{85} \approx 9 + \frac{1}{18} \cdot 4 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} = 9.2222\ldots.$$

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\sqrt{85}$.

Řešení

Protože známe $\sqrt{81} = 9$, položíme $x_0 = 81$ a $x = 85$, tj. $dx = x - x_0 = 4$. Tedy pro $f(x) = \sqrt{x}$ potom je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a tedy $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$. Ze vzorce pro aproximaci potom plyne, že

$$f(85) \approx f(81) + df(81) = f(81) + f'(81)\,dx, \qquad \text{tj.}$$
$$\sqrt{85} \approx 9 + \frac{1}{18} \cdot 4 = 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9} = 9.2222\ldots.$$

Pro srovnání je přesná hodnota $\sqrt{85} = 9.2195\ldots$.

Taylorův polynom

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí lineárního polynomu slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o Taylorově polynomu.

Taylorův polynom

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí lineárního polynomu slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o Taylorově polynomu.

Definice

Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ funkce $f(x)$ až do řádu n.
Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 je polynom

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

definovaný jako

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Alternativně zapisujeme Taylorův polynom pomocí sumy

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

přičemž pro $k = 0$ klademe $0! := 1$ a $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Alternativně zapisujeme Taylorův polynom pomocí sumy

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k,$$

přičemž pro $k = 0$ klademe $0! := 1$ a $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Poznámka

(i) Taylorův polynom stupně $n = 0$ se středem v bodě x_0 je tedy polynom

$$T_0(x) = f(x_0),$$

tedy jedná se o konstantní funkci.

(ii) Taylorův polynom stupně $n = 1$ se středem v bodě x_0 je tedy polynom

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Vidíme tedy, že tento polynom je přesně rovnice tečny nebo také vyjadřuje aproximaci funkce $f(x)$ pomocí diferenciálu .

Příklad

Určete Taylorův polynom pro funkce $f(x) = \sin(x), g(x) = e^x$.

Poznámka

Aproximace funkce $\sin x$ pomocí těchto polynomů je zobrazena v souboru <tayloruv_polynom_sinus.pdf>

Příklad

Určete Taylorův polynom pro funkce $f(x) = \sin(x), g(x) = e^x$.

Poznámka

Aproximace funkce $\sin x$ pomocí těchto polynomů je zobrazena v souboru `<taylоruv_polynom_sinus.pdf>`

Věta

Nechť $f(x)$ má spojité derivace $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť existuje vlastní derivace $f^{(n+1)}(x)$ na otevřeném intervalu (a, b). Potom pro každý bod $x \in (a, b)$ existuje bod $c \in (a, x)$ tak, že platí rovnost

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě a.

Důkaz.

Toto důležité tvrzení je důsledkem Rolleovy věty o střední hodnotě. Podrobnosti jsou ve sktiptech. □

Poznámka

S rostoucím n se stupeň Taylorova polynomu zvyšuje, až se pro $n \longrightarrow \infty$ dostáváme v polynomu $T_n(x)$ k součtu nekonečně mnoha členů – tzv. nekonečné řadě. Více o tomto tématu probereme později.

Důkaz.

Toto důležité tvrzení je důsledkem Rolleovy věty o střední hodnotě. Podrobnosti jsou ve sktiptech. □

Poznámka

S rostoucím n se stupeň Taylorova polynomu zvyšuje, až se pro $n \to \infty$ dostáváme v polynomu $T_n(x)$ k součtu nekonečně mnoha členů – tzv. nekonečné řadě. Více o tomto tématu probereme později.

Příklad

Odhadněte chybu v bodě $x = \frac{\pi}{4}$ Taylorova polynomu stupně $n = 6$ funkce $f(x) = \cos x$ se středem v bodě $x_0 = 0$.