Matematika II – 9. přednáška
Riemannův integrál

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

12. 11. 2008

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Plán přednášky

Bernhard Riemann (1826 – 1866) – jeden z nejvýznamnějších matematiků celé historie (nejen matematické analýzy) – viz http://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

V této části budou uvažované funkce vždy **ohraničené**.

Základní otázka zní: Jaká je plocha mezi $f(x)$ a osou x (na intervalu $[a, b]$)?

Obsah plochy

Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

Obsah plochy

Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

Obsah plochy

Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

Obsah plochy

Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

Obsah plochy

Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2$.

Obsah plochy

Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \frac{\pi}{2}$.

Obsah plochy

Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \frac{\pi}{2}$.

(g) $f(x) = -2x + 1$ pro $x \in [1, 2]$, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$. Ale protože je plocha pod osou x, klademe $P = -2$.

Obsah plochy

Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \frac{\pi}{2}$.

(g) $f(x) = -2x + 1$ pro $x \in [1, 2]$, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$. Ale protože je plocha pod osou x, klademe $P = -2$.

(h) $f(x) = x^3$ pro $x \in [-1, 1]$, plocha je stejná nad i pod osou x, a proto klademe $P = 0$.

Riemannův integrál

Pro definici integrálu využijeme přímo intuitivní úvahy, kterými jsme v minulé přednášce odůvodňovali souvislost Newtonova integrálu s velikostí plochy.

Riemannův integrál

Pro definici integrálu využijeme přímo intuitivní úvahy, kterými jsme v minulé přednášce odůvodňovali souvislost Newtonova integrálu s velikostí plochy.
Skutečnou plochu mezi $f(x)$ a osou x odhadneme pomocí vepsaných a opsaných obdélníků, čímž dostaneme dolní odhad $s(D, f)$ pro skutečnou plochu a horní odhad $S(D, f)$ pro skutečnou plochu.

Definice (dělení intervalu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dělením intervalu $[a, b]$ je konečná množina bodů $D \subseteq [a, b]$ s vlastností $a, b \in D$. Tedy

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{kde} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Body $x_0, x_1, \dots, x_n$ se nazývají dělící body a interval $[x_{k-1}, x_k]$ se nazývá dělící (pod)interval.

Definice (dělení intervalu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dělením intervalu $[a, b]$ je konečná množina bodů $D \subseteq [a, b]$ s vlastností $a, b \in D$. Tedy

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \qquad \text{kde} \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Body $x_0, x_1, \dots, x_n$ se nazývají dělící body a interval $[x_{k-1}, x_k]$ se nazývá dělící (pod)interval.
Délka největšího dělícího podintervalu je pak norma dělení D, tj. je to číslo

$$n(D) := \max_{k=1,\dots,n} \{x_k - x_{k-1}\}. \tag{1}$$

Množinu všech dělění intervalu $[a, b]$ označujeme jako $\mathcal{D}[a, b]$ či jenom jako $\mathcal{D}$.

Pro funkci $f(x)$ na $[a,b]$ a dělení D intervalu $[a,b]$ zaveďme

$$m_k := \inf\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}, M_k := \sup\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$

$$s(D,f) := \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}),$$ <u>dolní součet</u> $f(x)$ při dělení D,

$$S(D,f) := \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}),$$ <u>horní součet</u> $f(x)$ při dělení D.

Pro funkci $f(x)$ na $[a,b]$ a dělení D intervalu $[a,b]$ zaveďme

$$m_k := \inf\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}, M_k := \sup\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$

$$s(D,f) := \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}),$$ <u>dolní součet</u> $f(x)$ při dělení D,

$$S(D,f) := \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}),$$ <u>horní součet</u> $f(x)$ při dělení D.

Tvrzení

Nechť $c \le f(x) \le d$ pro každé $x \in [a,b]$. Potom pro každá dvě dělení $D_1, D_2 \in \mathcal{D}[a,b]$ platí

$$c\,(b-a) \le s(D_1,f) \le S(D_2,f) \le d\,(b-a),$$

tj. dolní součet libovolného dělení je nejvýše roven hornímu součtu libovolného dělení, přičemž všechny dolní součty jsou zdola ohraničeny číslem $c\,(b-a)$ a všechny horní součty jsou shora ohraničeny číslem $d\,(b-a)$.

Při vzrůstajícím počtu dělících bodů x_k v dělení D_1, D_2 se bude dolní součet $s(D_1, f)$ zvětšovat a zároveň horní součet $S(D_2, f)$ zmenšovat.

Při vzrůstajícím počtu dělících bodů x_k v dělení D_1, D_2 se bude dolní součet $s(D_1, f)$ zvětšovat a zároveň horní součet $S(D_2, f)$ zmenšovat.

Definice

Číslo

$$\underline{\int_a^b} f := \sup \left\{ s(D, f),\ D \in \mathcal{D} \right\}$$

nazýváme dolním (Riemannovým) integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.
Číslo

$$\overline{\int_a^b} f := \inf \left\{ S(D, f),\ D \in \mathcal{D} \right\}$$

nazýváme horním (Riemannovým) integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Současně víme, že vždy je $c\,(b-a) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le d\,(b-a)$.

Definice (Riemannův integrál)

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ je <u>integrovatelná</u> (v Riemannově smyslu) na $[a, b]$ a toto společné číslo značíme $\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Množinu všech (Riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a, b]$.

Definice (Riemannův integrál)

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ je <u>integrovatelná</u> (v Riemannově smyslu) na $[a, b]$ a toto společné číslo značíme

$\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$

Množinu všech (Riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a, b]$.

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ <u>není integrovatelná na $[a, b]$.</u>

Definice (Riemannův integrál)

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ je <u>integrovatelná</u> (v Riemannově smyslu) na $[a, b]$ a toto společné číslo značíme $\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Množinu všech (Riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a, b]$.

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ <u>není integrovatelná na $[a, b]$.</u>

Riemannův integrál přes interval $[a, b]$ je tedy <u>číslo</u>. Zápis pro Riemannův integrál budeme používat také ve tvaru s integrační proměnnou.

Příklad

Pro konstantní funkci $f(x) = c$ máme $m_k = M_k = c$ pro všechny k a tedy je

$$s(D, f) = c\,(b - a), \quad S(D, f) = c\,(b - a), \quad \forall D \in \mathcal{D}, \quad \Rightarrow$$

$$\int_a^b c = \underline{\int_a^b} k = \overline{\int_a^b} k = c\,(b - a).$$

Příklad

Dirichletova funkce χ [chí]

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b], \\ 0, & \text{pro } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b], \end{cases}$$

Potom $m_k = 0$ a $M_k = 1$ pro všechna k a tedy je

$$s(D, \chi) = 0, \quad S(D, \chi) = b - a, \quad \forall D \in \mathcal{D}, \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} \chi = \sup\{s(D, \chi)\} = \sup\{0\} = 0,$$

$$\overline{\int_a^b} k = \inf\{S(D, \chi)\} = \inf\{b - a\} = b - a \quad \Rightarrow$$

$$0 = \underline{\int_a^b} \chi < \overline{\int_a^b} \chi = b - a, \quad \text{a tedy} \quad \chi \notin \mathcal{R}[a, b],$$

tj.χ není integrovatelná.

Jak obecně určíme, zda je daná funkce integrovatelná (a pak jakou hodnotu má její určitý integrál) či nikoliv?

Definice

Nulová posloupnost dělení $D_k \in \mathcal{D}$ je taková posloupnost dělení, která splňuje $n(D_k) \to 0$ pro $k \to \infty$, neboli norma dělení jde k nule.

Jak obecně určíme, zda je daná funkce integrovatelná (a pak jakou hodnotu má její určitý integrál) či nikoliv?

Definice

Nulová posloupnost dělení $D_k \in \mathcal{D}$ je taková posloupnost dělení, která splňuje $n(D_k) \to 0$ pro $k \to \infty$, neboli norma dělení jde k nule.

Věta

Nechť je funkce $f(x)$ ohraničená na intervalu $[a, b]$. Potom pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $D_k \in \mathcal{D}$ platí, že

$$s(D_k, f) \to \underline{\int_a^b} f, \qquad S(D_k, f) \to \overline{\int_a^b} f, \qquad \text{pro } k \to \infty.$$

Je-li navíc $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom dolní součty $s(D_k, f)$ i horní součty $S(D_k, f)$ konvergují (ve smyslu existence vlastní limity) k číslu $\int_a^b f$.

Z této věty vyplývá, že pokud víme, že je $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom lze $\int_a^b f$ určit limitním přechodem pomocí libovolné nulové posloupnosti dělení intervalu $[a, b]$.
Zásadní otázku, které funkce jsou vlastně (Riemannovsky) integrovatelné, zodpovídá následující tvrzení.

Věta

(i) *Každá spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ je zde také integrovatelná, neboli*

$$C[a, b] \subseteq \mathbb{R}[a, b].$$

(ii) *Každá monotónní funkce na intervalu $[a, b]$ je zde také integrovatelná.*

Poznámka

Riemannův integrál (tj. vlastně orientovaná plocha) se zřejmě nezmění, pokud je integrovatelná funkce $f(x)$ nespojitá či není definována v konečně mnoha bodech (či obecněji na množině míry nula), viz obr. Tímto dostáváme určitý integrál přes otevřený nebo polouzavřený interval. Zejména pro (ohraničené) intervaly všech typů (a, b), $(a, b]$ i $[a, b)$ je příslušný určitý integrál přes tento interval roven již dříve definovanému číslu $\int_a^b f$, tj. Riemannově integrálu přes uzavřený interval $[a, b]$.

Poznámka

Riemannův integrál (tj. vlastně orientovaná plocha) se zřejmě nezmění, pokud je integrovatelná funkce $f(x)$ nespojitá či není definována v konečně mnoha bodech (či obecněji na množině míry nula), viz obr. Tímto dostáváme určitý integrál přes otevřený nebo polouzavřený interval. Zejména pro (ohraničené) intervaly všech typů (a, b), $(a, b]$ i $[a, b)$ je příslušný určitý integrál přes tento interval roven již dříve definovanému číslu $\int_a^b f$, tj. Riemannově integrálu přes uzavřený interval $[a, b]$.

Příklad

Pro nespojitou funkci $\operatorname{sgn} x$ platí $\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn} x \, dx = 3 + (-2) = 1$.
Obdobně lze ukázat, že pro $a < 0 < b$ je $\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx = a + b$.

Plán přednášky

Pravidla pro určitý integrál

Věta

Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ *($f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné) a* $c \in \mathbb{R}$ *je konstanta.*

(i) *Pravidlo konstantního násobku:* $c \,.\, f \in \mathcal{R}[a, b]$ *a platí*

$$\int_a^b c \,.\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:* $f \pm g \in \mathcal{R}[a, b]$ *a platí*

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$$

(iii) *Pravidlo monotonie: je-li* $f(x) \leq g(x)$ *na* $[a, b]$*, potom*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(iv) *Pravidlo absolutní hodnoty:* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ a platí

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

(v) *Pravidlo součinu:* $f \,.\, g \in \mathcal{R}[a,b]$.

(vi) *Pravidlo podílu:* je-li $g(x) \geq c$ na intervalu $[a,b]$ pro nějaké $c > 0$, potom je $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$.

(vii) *Pravidlo návaznosti:* je-li $a < c < b$, potom je $f \in \mathcal{R}[a,c]$, $f \in \mathcal{R}[c,b]$ a platí

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Všimněte si, že pravidla (i) a (ii) vlastně říkají, že zobrazení

$$I : \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad I(f) := \int_a^b f$$

je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory $\mathcal{R}[a,b]$ a $\mathbb{R}$.

Plán přednášky

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom je podle návaznosti také integrovatelná na intervalu $[a, x]$ pro každé $x \in [a, b]$. Tedy předpis

$$F(x) := \int_a^x f = \int_a^x f(t)\, dt$$

definuje funkci $F(x)$, která je řádně definovaná pro všechna $x \in [a, b]$.

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom je podle návaznosti také integrovatelná na intervalu $[a, x]$ pro každé $x \in [a, b]$. Tedy předpis

$$F(x) := \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt$$

definuje funkci $F(x)$, která je řádně definovaná pro všechna $x \in [a, b]$.

Příklad

Pro (nespojitou) funkci

$$f(x) := \begin{cases} 5, & \text{pro } x \in [0, 1), \\ 10, & \text{pro } x \in [1, 2], \end{cases}$$

je

$$F(x) := \begin{cases} 5x, & \text{pro } x \in [0, 1], \\ 10x - 5, & \text{pro } x \in [1, 2], \end{cases}$$

V následujích dvou tvrzeních uvidíme, že funkce $F(x)$ vylepšuje vlastnosti funkce f. Viz např. předchozí příklad, kdy z nespojité funkce $f(x)$ dostaneme spojitou funkci $F(x)$.

Věta

Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (tedy funkce $f(x)$ může být i nespojitá). Potom je funkce

$$F(x) := \int_a^x f$$

spojitá na intervalu $[a,b]$.

Důkaz.

Důkaz provedeme pro ohraničenou funkci $f(x)$. Obecný případ lze najít v literatuře.

Nechť $x_0 \in [a,b]$ je libovolný bod. Chceme ukázat, že $F(x) - F(x_0) \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to x_0$. Platí $|F(x) - F(x_0)| =$ $\left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \le \left| \int_{x_0}^x |f| \right| \le \left| \int_{x_0}^x c \right| = c \underbrace{|x - x_0|}_{\to 0} \to 0.$

□

Věta

Je-li $f(x)$ spojitá na nějakém okolí bodu x_0, potom má funkce $F(x) := \int_a^x f$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Důsledek (Fundamentální vztah integrálního počtu)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, potom má funkce $F(x) := \int_a^x f$ spojitou derivaci $F'(x) = f(x)$ na $[a, b]$, tj. platí vztah

$$\left(\int_a^x f(t)\, dt \right)' = f(x). \tag{2}$$

Předchozí vztah v sobě soustřeďuje poznatky o *derivaci*, *neurčitém integrálu*, *určitém integrálu* a *spojitosti*. Tento důsledek je **důkazem věty o existenci primitivní funkce.**

Newton-Leibnitzova formule

Věta

Je-li $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a je-li $F(x)$ libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na (a, b), přičemž $F(x)$ je spojitá na $[a, b]$, potom je

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Newton-Leibnitzova formule

Věta

Je-li $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a je-li $F(x)$ libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na (a, b), přičemž $F(x)$ je spojitá na $[a, b]$, potom je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz.

Důkaz ale provedeme pouze pro spojitou funkci $f(x)$.
Je-li $f(x)$ spojitá na $[a, b]$, potom má $f(x)$ na $[a, b]$ primitivní funkci, označme ji $F(x)$. Dále, protože je podle předchozího důsledku funkce $\int_a^x f$ také primitivní k $f(x)$ na $[a, b]$, musí se tyto dvě primitivní funkce navzájem lišit o konstantu. Tedy platí, že $F(x) = \int_a^x f + C$ pro každé $x \in [a, b]$, a proto je

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f + C \right) - \left(\int_a^a f + C \right) = \int_a^b f.$$

Výpočet určitého integrálu

Díky předchozí větě vidíme, jak využít metodu per-partes a substituční metody i pro výpočet určitého integrálu. Při použití substituční metody máme oproti výpočtu neurčitého integrálu tu výhodu, že není třeba provádět zpětnou substituci, stačí pri substituci transformovat i meze integrace.

Věta (Substituce pro určitý integrál)

Nechť je funkce $f(t)$ spojitá na intervalu $[c, d]$ a nechť má funkce $\varphi(x)$ integrovatelnou derivaci na intervalu $[a, b]$ a $\varphi([a, b]) \subseteq [c, d]$. Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \,.\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt.$$

Neboli v daném integrálu volíme substituci $t = \varphi(x)$ a transformujeme nejen integrál, ale i meze (v tomtéž pořadí mezí).

Příklad

Vypočtěte obsah kruhu s poloměrem $r > 0$.

Příklad

Vypočtěte obsah kruhu s poloměrem $r > 0$.

Řešení

Obsah kruhu vypočítáme např. jako dvojnásobek obsahu půlkruhu.

$$P = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = (r\cos t)\, dt \\ x = -r \;\Rightarrow\; t = -\frac{\pi}{2} \\ x = r \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}}_{= r\cos t} \cdot \underbrace{r\cos t\, dt}_{dx} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\, dt =$$

$$= 2\, r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = 2\, r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\, r^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin\pi}{4}}_{=0} \right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin(-\pi)}{4}}_{=0} \right) \right\} = \pi r^2.$$

Plán přednášky

Obsah plochy mezi dvěma grafy

Víme, že určitý integrál $\int_a^b f$ byl zkonstruován jako orientovaná plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $[a, b]$. Tato orientovaná plocha je zřejmě rovna skutečné ploše, pokud je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Obsah plochy mezi dvěma grafy

Víme, že určitý integrál $\int_a^b f$ byl zkonstruován jako orientovaná plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $[a, b]$. Tato orientovaná plocha je zřejmě rovna skutečné ploše, pokud je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$.
Pokud nás zajímá velikost plochy mezi grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$, viz obr., určíme ji pomocí vepsaných a opsaných obdélníků (stejně jako při konstrukci Riemannova integrálu), avšak nyní bude obsah každého takového obdélníka tvaru $[f(c_k) - g(c_k)]\,(x_k - x_{k-1})$, Riemannův součet je pak

$$\sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\,(x_k - x_{k-1}).$$

Tyto úvahy vedou k odvozeni následujícího vzorce.

Věta (plocha mezi grafy)

Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *a* $f(x) \geq g(x)$ *na* $[a,b]$. *Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu* $[a,b]$ *velikost*

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b [\text{ horní funkce } - \text{ dolní funkce }]\,dx.$$

Věta (plocha mezi grafy)

Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ *a* $f(x) \geq g(x)$ *na* $[a, b]$. *Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu* $[a, b]$ *velikost*

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b [\text{ horní funkce } - \text{ dolní funkce }]\,dx.$$

Příklad

Určete plochu mezi grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = 2\sin x$ na intervalu $[\pi, 2\pi]$.

Věta (plocha mezi grafy)

Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) \geq g(x)$ na $[a,b]$. Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu $[a,b]$ velikost

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b [\text{ horní funkce } - \text{ dolní funkce }]\,dx.$$

Příklad

Určete plochu mezi grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = 2\sin x$ na intervalu $[\pi, 2\pi]$.

Řešení

Oba grafy se protínají v bodech $x = \pi$ a $x = 2\pi$, přičemž funkce $y = \sin x$ je horní funkce na tomto intervalu. Proto

$$P = \int_\pi^{2\pi} (\sin x - 2\sin x)\,dx = \int_\pi^{2\pi} (-\sin x)\,dx = \Big[\cos x\Big]_\pi^{2\pi}$$
$$= \cos 2\pi - \cos \pi = 1 - (-1) = 2.$$

Délka křivky

Křivka C v rovině, $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, je zadána parametricky jako zobrazení $C : \ t \mapsto [x(t), y(t)]$.

Příklad

Křivka $C : \ t \mapsto [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$ je kružnice o poloměru $r = 1$ se středem v počátku.

Délka křivky

Křivka C v rovině, $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, je zadána parametricky jako zobrazení $C : \ t \mapsto [x(t), y(t)]$.

Příklad

Křivka $C : \ t \mapsto [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$ je kružnice o poloměru $r = 1$ se středem v počátku.

Věta (Délka křivky v rovině)

Nechť C je křivka v rovině a $[x(t), y(t)]$ pro $t \in [\alpha, \beta]$ její parametrizace. Mají-li souřadné funkce $x(t)$ a $y(t)$ spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, potom má křivka C konečnou délku a platí

$$d(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Odvození předchozího vztahu pomocí dělení je obdobné jako u obsahu plochy. Intuitivně lze s využitím Pythagorovy věty argumentovat takto: Představme si křivku C jako dráhu pohybu v čase t. Derivací tohoto zobrazení dostaneme hodnoty, které budou odpovídat rychlosti pohybu po takovéto dráze. Proto celková délka křivky (tj. dráha uražená za dobu mezi hodnotami $t = a$, $t = b$) bude dána integrálem přes interval $[a, b]$, kde integrovanou funkcí je dráha uražená za *nekonečně malý čas* $\mathrm{d}t$. Ta je podle Pythagorovy věty rovna $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$, a odtud dostáváme požadovaný výsledek.

Příklad

Určete obvod kružnice o poloměru $r > 0$.

Příklad

Určete obvod kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení

Kružnice má parametrizaci $[x(t), y(t)] = [r\cos t, r\sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$. Tyto funkce mají spojitou derivaci $[x'(t), y'(t)] = [-r\sin t, r\cos t]$ na $[0, 2\pi]$, a proto je obvod kružnice roven

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\,(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = \big[\, r\, t \,\big]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

Graf funkce $f(x)$ můžeme chápat jako množinu bodů $[x, f(x)]$, tedy je to speciální případ křivky v rovině, která má parametrizaci $[t, f(t)]$ pro $t \in [a, b]$ (v tomto případě tuto parametrizaci ale píšeme s proměnnou x). A protože má tato parametrizace derivaci $[(t)', f'(t)] = [1, f'(t)]$, dostáváme

Důsledek

Má-li funkce $f(x)$ spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$, potom má její graf na intervalu $[a, b]$ konečnou délku a platí

$$d(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Objem rotačního tělesa

Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x kolem osy x na intervalu $[a, b]$ (viz obr.). Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a, b]$, tj. je buď stále nezáporná nabo nekladná).

Objem rotačního tělesa

Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x kolem osy x na intervalu $[a, b]$ (viz obr.). Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a, b]$, tj. je buď stále nezáporná nabo nekladná).

Věta (objem rotačního tělesa)

Nechť $f(x)$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $[a, b]$. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi grafem f a osou x na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Objem rotačního tělesa

Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x kolem osy x na intervalu $[a, b]$ (viz obr.). Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a, b]$, tj. je buď stále nezáporná nabo nekladná).

Věta (objem rotačního tělesa)

Nechť $f(x)$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $[a, b]$. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi grafem f a osou x na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Intuitivní zdůvodnění je obdobné jako u délky křivky – objem *nekonečně malé válcové části tělesa* o délce dx je dán součinem dx a obsahu *kruhové podstavy o obsahu* $\pi f(x)^2$.

Povrch rotačního tělesa

Analogicky jako objem vypočteme i povrch pláště rotačního tělesa. Pokud vznikne těleso rotací grafu funkce f kolem osy x v intervalu $[a, b]$, vzniká při přírůstku Δx nárůst plochy, jehož velikost je rovna součinu Δs délky křivky zadané grafem funkce f a velikosti kružnice o poloměru $f(x)$. Plocha se proto spočte formulí

$$S(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\,ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,$$

kde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ je dán přírůstkem délky křivky $y = f(x)$.

Povrch rotačního tělesa

Analogicky jako objem vypočteme i povrch pláště rotačního tělesa. Pokud vznikne těleso rotací grafu funkce f kolem osy x v intervalu $[a, b]$, vzniká při přírůstku Δx nárůst plochy, jehož velikost je rovna součinu Δs délky křivky zadané grafem funkce f a velikosti kružnice o poloměru $f(x)$. Plocha se proto spočte formulí

$$S(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\, ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

kde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ je dán přírůstkem délky křivky $y = f(x)$.

Věta (obsah pláště rotačního tělesa)

Nechť $f(x)$ je nezáporná funkce se spojitou derivací $f'(x)$ na intervalu $[a, b]$. Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne grafu f na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad

Určete povrch jednotkové koule.

Příklad

Určete povrch jednotkové koule.

Řešení

Povrch určíme jako dvojnásobek povrchu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0, 1]$. Protože platí $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, je tedy

$$S = 2\,.\,2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{\frac{(r^2 - x^2) + x^2}{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 4\pi \int_0^r r\,dx = 4\pi\left[\,rx\,\right]_0^r = 4\pi r^2.$$